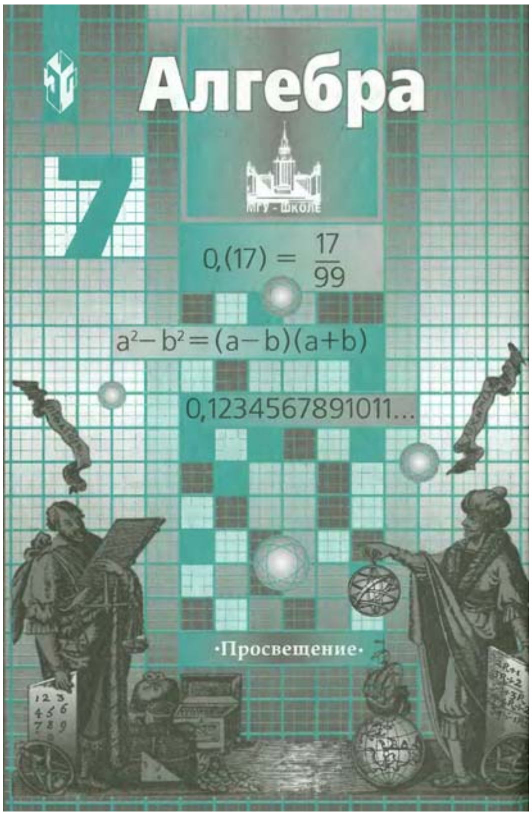

Алгебра
7
МГУ - ШКОЛЕ
$0,(17) = \frac{17}{99}$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
0,1234567891011...
·Просвещение·

СВОЙСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1) *Для любых двух чисел a и b имеет место только одно из соотношений:*

$$a = b,\ \ a < b,\ \ a > b.$$

2) *Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.*

3) *Если $a < b$, то $a + c < b + c$.*

4) *Если $a < b$, $c > 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$.*

5) *Если $a < b$, то существует c такое, что $a < c < b$.*

Для любых a, b, c справедливы равенства:

1) $a + b = b + a;$
2) $(a + b) + c = a + (b + c);$
3) $a \cdot b = b \cdot a;$
4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$
5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$
6) $a + 0 = a;$
7) $a + (-a) = 0;$
8) $a - b = a + (-b);$
9) $a \cdot 1 = a;$
10) $a \cdot 0 = 0;$
11) $-a = (-1) \cdot a;$
12) $a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0);$
13) $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \ (b \neq 0).$

Учебники серии «МГУ — школе» позволят учащимся получить хорошее базовое образование и помогут выработать правильный взгляд на основы научного знания. Это важно. Большинство школьных предметов — фундамент Здания Науки. Лучше сразу понять, как он устроен, чтобы потом, при изучении верхних этажей, не возвращаться к исследованию фундамента.
Учебники серии «МГУ — школе» пишут опытные школьные учителя вместе с профессорами и преподавателями Московского университета.
Надеюсь, что учеба по этим книгам принесет школьникам как пользу, так и удовольствие.

Ректор
Московского
университета
академик

В. Садовничий

Алгебра

Учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

5-е издание

Москва
«Просвещение»
2005

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Авторы:
С. М. Никольский, М. К. Потапов,
Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин

Условные обозначения в учебнике:

° — наиболее легкие задания, предназначенные для устной работы;
* — задания повышенной трудности.

Алгебра: учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений/
А45 [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин].—5-е изд.— М. : Просвещение, 2005.— 285 с. : ил.— ISBN 5-09-014400-1.

Учебник представляет собой новый тип учебника, который содержит материал как для общеобразовательных классов, так и для классов с углубленным изучением математики. Учащиеся могут переходить с одной программы обучения на другую, не меняя книги.

Главы заканчиваются дополнительным материалом, в котором приводятся «Исторические сведения» и «Задания для повторения», содержащие много вычислительных упражнений и текстовых задач.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 5-09-014400-1

ГЛАВА I

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

$$0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$0,(17)=\frac{17}{99}$$

$$0,1010010001\ldots=?$$

§ 1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Натуральные числа и действия с ними

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... называют **натуральными** или **целыми положительными** числами. Нуль не считают натуральным числом.

Сумма и произведение натуральных чисел являются натуральными числами.

Например, $3+5=8$, $3\cdot5=15$.

Разность натуральных чисел является натуральным числом только в том случае, если уменьшаемое больше вычитаемого.

Например, $8-5=3$.

Если уменьшаемое меньше или равно вычитаемому, то разность натуральных чисел не является натуральным числом.

Частное двух натуральных чисел также не всегда является натуральным числом. Если при делении одного натурального числа на другое в частном получается натуральное число, то говорят, что **первое число делится на второе нацело**.

Например, 6 делится на 3 нацело, а 7 не делится на 3 нацело. Слово «нацело» в этом предложении обычно опускают. Говорят, что 6 делится на 3, а 7 не делится на 3.

Натуральные числа принято обозначать малыми латинскими буквами: a, b, c, ..., p, q, ...

Каждое натуральное число p делится на 1 и само на себя:

$$p:1=p,\ p:p=1.$$

1°. Какие числа называют натуральными? Является ли 0 натуральным числом?

2°. Каким числом является сумма натуральных чисел?

3°. В каком случае разность натуральных чисел есть натуральное число?

4°. Какое число получается при умножении натуральных чисел?

5°. Всегда ли выполнимо деление натуральных чисел нацело?

6°. На какие натуральные числа делится любое натуральное число?

7°. Делятся ли нацело на 7 числа: 12, 27, 42, 126?

8°. Сформулируйте признак делимости на:
а) 10; б) 5; в) 2; г) 3; д) 9.

9°. Делятся ли нацело на 15 числа: 30, 105, 215, 360?

10. Делятся ли нацело на 18 числа: 189, 252, 456, 1998, 1999?

11°. Какие из чисел 3124, 3582, 3528, 31212 делятся на 4?

12. Делятся ли нацело на 45 числа: 243, 900, 954, 5553, 3555?

13°. Какие из чисел 5425, 3530, 3550, 31275 делятся на 25?

Вычислите **(14—15)**:

14. а) $7326+359$; б) $5321-985$; в) $424\cdot27$;
г) $15795:39$; д) $732\cdot254-8145:45+314253$.

15. а) $329\cdot759+329\cdot41$; б) $724\cdot928-724\cdot128$;
в) $398\cdot801-398$; г) $854\cdot399+854$.

16. Объясните, не выполняя всех вычислений, почему:
а) $357\cdot828+357\cdot936$ делится на 357;
б) $425\cdot723-315\cdot723$ делится на 3; на 5; на 15.

17*. Натуральное число N делится на натуральное число p $(p>1)$. Докажите, что $N+1$ не делится на p.

18*. Выписали первые 99 натуральных чисел: 1, 2, ..., 99. Запятые стерли и получили огромное число.
а) Сколько раз в записи этого числа встречается каждая цифра?
б) Делится ли это число на 9?

19. Произведение первых n натуральных чисел обозначают $n!$ и читают «эн факториал»:

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n.$$

На сколько нулей оканчивается:

а) 10!; б) 50!; в) 100!?

1.2. Степень числа

При умножении числа самого на себя несколько раз применяют сокращенное обозначение.

Произведение четырех множителей, каждый из которых равен числу 5, называют четвертой степенью числа 5 и обозначают 5^4, т. е.

$$5\cdot5\cdot5\cdot5=5^4$$

При этом число 5 называют основанием степени, а число 4 — показателем степени.

Вообще, **k-й степенью числа p называют произведение k множителей, каждый из которых равен p:**

$$p^k = \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{k \text{ раз}} \quad (k > 1).$$

Число p называют *основанием степени*, а число k — *показателем степени*.

Число p в *первой степени* надо понимать как само число p, т. е.

$$p^1 = p,$$

например, $5^1 = 5$.

Легко видеть, что верны следующие равенства:

$$2^2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6^2,$$
$$5^1 \cdot 6^1 = 5 \cdot 6 = 30^1.$$

Эти равенства подтверждают справедливость следующего *свойства* степеней:

1) **Произведение степеней с одним и тем же показателем равно степени с тем же показателем и основанием, равным произведению оснований:**

$$p^n \cdot q^n = (p \cdot q)^n.$$

Верны также равенства:

$$3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 3^{2+4},$$
$$5 \cdot 5^3 = 5 \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 5^{1+3}.$$

Эти равенства подтверждают справедливость следующего свойства степеней:

2) **Произведение степеней с одним и тем же основанием есть степень с тем же основанием и показателем, равным сумме показателей этих степеней, т. е.**

$$p^n \cdot p^m = p^{n+m}.$$

Наконец, рассмотрим равенства:

$$(7^3)^2 = 7^3 \cdot 7^3 = (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6 = 7^{3 \cdot 2},$$
$$(2^4)^3 = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) =$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{12} = 2^{4 \cdot 3}.$$

Эти равенства подтверждают справедливость следующего свойства степеней:

3) **Степень степени числа равна степени этого числа с показателем, равным произведению показателей этих степеней, т. е.**

$$(p^m)^n = p^{m \cdot n}.$$

20°. Что называют k-й степенью числа p? Назовите показатель и основание степени в записи p^k.

21°. Чему равна первая степень числа?

22°. Чему равно произведение степеней с одним и тем же показателем? Приведите примеры.

23°. Чему равно произведение степеней чисел с одним и тем же основанием? Приведите примеры.

24°. Чему равен показатель степени при возведении степени числа в степень? Приведите примеры.

25. Запишите произведение в виде степени, назовите основание и показатель степени:

а) $2\cdot2\cdot2$; б) $5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$; в) $10\cdot10\cdot10\cdot10$;
г) $3\cdot3\cdot3\cdot3$; д) $7\cdot7$; е) $8\cdot8\cdot8$.

26. Вычислите:

а) 2^3; б) 5^2; в) 3^4;
г) 4^3; д) 2^4; е) 99^1.

27. Верно ли равенство:

а) $2^3\cdot3^3=(2\cdot3)^3$; б) $7^{10}\cdot8^{10}=(7\cdot8)^{10}$;
в) $(2\cdot5)^4=2^4\cdot5^4$; г) $2^7\cdot5^7=(2\cdot5)^7$?

28. Запишите произведение в виде степени числа 10:

а) $2\cdot5$; б) $2\cdot2\cdot5\cdot5$; в) $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$; г) $2^6\cdot5^6$.

29. На какое наименьшее число надо умножить данное, чтобы результат можно было записать в виде степени числа 10:

а) 2; б) 5; в) $2\cdot5^2$; г) $2^2\cdot5$;
д) $2^4\cdot5^2$; е) $2^3\cdot5^6$; ж) 20; з) 50;
и) 250; к) 80; л) 25; м) 16?

30°. Верно ли равенство:

а) $2^3\cdot2^5=2^8$; б) $5^2\cdot5^3=5^5$;
в) $2^7\cdot2=2^8$; г) $3^4\cdot3^5\cdot3=3^{10}$?

31. Запишите произведение в виде степени:

а) $2^4\cdot2^3$; б) $3^5\cdot3^2$; в) $4^2\cdot4^5$;
г) $5^7\cdot5$; д) $6\cdot6^3$; е) $2^5\cdot2^3\cdot2$;
ж) $3\cdot3^2\cdot3^3$; з) $4\cdot4^5\cdot4$; и) $5\cdot5^2\cdot5^3$.

32°. Верно ли равенство:

а) $(2^3)^2=2^6$; б) $(3^5)^6=3^{30}$;
в) $(3^7)^2=3^9$; г) $(5^4)^2=5^8$?

33. Используя свойство 3) степеней, запишите в виде степени:

а) $(2^2)^3$; б) $(3^4)^2$; в) $(3^7)^2$;
г) $(5^3)^4$; д) $(10^3)^5$; е) $(7^2)^4$.

1.3. Простые и составные числа

Простым числом называют натуральное число, которое больше 1 и делится только на 1 и на себя.

Приведем первые 15 простых чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Все простые числа выписать невозможно, так как их бесконечно много. Любой список простых чисел можно пополнить еще одним простым числом, отличным от этих чисел. Этот факт доказал древнегреческий ученый Эвклид (III в. до н. э.). Он рассуждал так.

Доказательство.* Пусть простых чисел конечное число и наибольшее из них p:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ p.$$

Составим новое число:

$$N=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot p.$$

Это число больше любого из простых чисел, и оно делится на любое из них. Увеличим число N на 1. Полученное число $N+1$ не делится ни на одно из чисел 2, 3, 5, ..., p и поэтому является простым числом, большим p, что противоречит предположению, что p — наибольшее простое число. Следовательно, наибольшее простое число не существует.

Итак, каждое простое число делится только на 1 и само на себя.

Непростые натуральные числа, большие 1, называют **составными.**

Приведем составные числа, меньшие 25:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24.

Каждое составное число делится на 1, на себя и еще хотя бы на одно натуральное число.

Принято считать, что единица не является ни простым, ни составным числом.

Таким образом, **множество всех натуральных чисел состоит из простых чисел, составных чисел и единицы.**

34°. Какое число называют простым; составным?

35°. Является ли 1 простым числом; составным?

36°. Какие из чисел являются простыми, какие составными:

а) 9, 12, 14, 17, 28, 37, 47, 69, 517;

б) 41, 57, 1121, 793?

37. Являются ли простыми числа: 1 000 011; 2 012 345; 111 111 111?

38. Выпишите первые 25 простых чисел в порядке возрастания.

39. Выпишите все составные числа, не превышающие 50, в порядке возрастания.

40. Докажите, что 2 — единственное четное простое число.

41. Запишите числа 48 и 96 в виде разности квадратов двух простых чисел.

42. Можно ли простое число записать в виде суммы:
а) двух четных чисел; б) двух нечетных чисел;
в) четного и нечетного чисел?

43. Великий математик Леонард Эйлер нашел формулу простого числа $P=n^2-n+41$, при подстановке в которую вместо n любого числа от 1 до 40 получается простое число *(проверьте)*.

44. Докажите, что найдется такое натуральное число n, для которого n^2-n+41 является составным числом.

45*. а) Докажите, что одно из трех соседних нечетных чисел делится на 3.

б) Известно, что p, $p+2$, $p+4$ — простые числа. Найдите p. Докажите, что других p не существует.

1.4. Делители натурального числа

Делителем данного натурального числа называют натуральное число, на которое делится (нацело) данное число.

Из этого определения следует, что простое число p имеет только два делителя 1 и p, а составное число n, кроме делителей 1 и n, имеет еще по крайней мере один делитель.

Так, делителями числа 13 являются числа 1 и 13, делителями числа 4 являются числа 1, 2, 4, делителями числа 12 являются числа 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Если делитель — простое число, то его называют **простым делителем**. Так, число 13 имеет один простой делитель 13, число 4 — один простой делитель 2, а число 12 — два простых делителя 2 и 3.

Каждое натуральное составное число можно представить как произведение степеней различных его простых делителей, например:

$$28=2^2\cdot 7,$$
$$22=2\cdot 11,$$
$$81=3^4,$$
$$100=2^2\cdot 5^2.$$

Правые части этих равенств называют **разложениями на простые множители** чисел, записанных в левых частях.

Таким образом, **разложить данное натуральное число на простые множители — это значит представить его как произведение**

различных его простых делителей, взятых в соответствующих степенях.

Справедливо следующее утверждение, называемое **основной теоремой арифметики**:

Каждое натуральное число можно разложить на простые множители, т. е. представить его в виде произведения различных его простых делителей, взятых в соответствующих степенях. Такое разложение единственно для каждого натурального числа, т. е. у него нет других простых делителей и его простые делители нельзя записать в других степенях.

Покажем на примере, как разлагаются на простые множители натуральные числа.

Пример. Разложим число 90 на простые множители.

90 делится на простое число 2, поэтому

$$90=2\cdot45.$$

45 не делится на 2, но делится на простое число 3, поэтому

$$45=3\cdot15.$$

15 делится на 3, поэтому

$$15=3\cdot5.$$

Так как 5 — простое число, то процесс отыскания простых делителей закончен.

Этот процесс удобно записать так:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Итак, получаем равенство

$$90=2\cdot3\cdot3\cdot5=2\cdot3^2\cdot5.$$

Правая часть этого равенства есть разложение на простые множители числа 90.

В дальнейшем нас будут интересовать натуральные числа, которые не имеют других простых делителей, кроме 2 и 5.

Разъясним, что понимается под словами: «данное натуральное число m не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5».

Во-первых, m может быть степенью числа 2, т. е. равняться одному из чисел:

$$2;\ 2^2=4;\ 2^3=8;\ 2^4=16;\ 2^5=32;\ \ldots$$

Во-вторых, m может быть степенью числа 5, т. е. равняться одному из чисел:

$$5;\ 5^2=25;\ 5^3=125;\ 5^4=625;\ \ldots$$

В-третьих, m может быть произведением некоторой степени числа 2 на некоторую степень числа 5. Примерами таких чисел являются числа:

$$2^2\cdot 5^2=100,$$
$$2^3\cdot 5^2=200,$$
$$2^4\cdot 5=80.$$

Наконец, m может быть единицей ($m=1$). Ведь единица не имеет простых делителей.

46°. Что называют делителем натурального числа? Назовите делители числа 12.

47°. Что называют простым делителем натурального числа? Назовите простые делители числа 12.

48. Найдите все делители числа:
а) 17; б) 45; в) 113; г) 476; д) 32.

49. Найдите все простые делители числа:
а) 19; б) 54; в) 112; г) 232.

50. Напишите пять натуральных чисел, не имеющих других простых делителей, кроме 2 и 5, и пять натуральных чисел, не обладающих этим свойством.

51. а) Приведите примеры натуральных чисел, имеющих делители 2 и 5; 3 и 4. Какие делители имеют выбранные натуральные числа, кроме указанных?
б) Приведите примеры натуральных чисел, имеющих делители только 2 и 5.

52. Найдите все делители чисел: 2, 6, 12, 28, 48, 100.

53. Найдите все простые делители чисел:
а) 4, 9, 15, 10, 24;
б) 46, 50, 58, 99, 128;
в) 196, 254, 400, 625, 10 000.

54. Напишите пять натуральных чисел, не имеющих других простых делителей, кроме 2 и 5.

55. Разложите на простые множители числа. Запишите ответ в виде произведения степеней простых чисел.

Например: $56=2\cdot 28=2\cdot 2\cdot 14=2\cdot 2\cdot 2\cdot 7=2^3\cdot 7$

или

$$\begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 56=2^3\cdot 7.$$

а) 16, 18, 26; б) 35, 48, 72;
в) 144, 210, 800; г) 216, 343, 384;
д) 1024, 1728, 1575; е) 9225, 1001, 1739.

56. Сколько чисел от 1 до 100:
а) делится на 2;
б) делится на 5;
в) делится на 2 и на 5;
г) не делится на 2 и на 5?

57*. Сколько чисел от 1 до 100 не делится ни на 2, ни на 3?

§ 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

2.1. Обыкновенные дроби. Конечные десятичные дроби

Положительным рациональным числом называют число, которое может быть записано в виде $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа.

Положительное рациональное число называют также **обыкновенной положительной дробью** или просто **дробью**. Число p называют **числителем** дроби, а число q — ее **знаменателем**.

Примеры дробей: $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{123}{150}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{7}{1}$, $\frac{7}{5}$.

Любое натуральное число p можно записать в виде дроби

$$\frac{p}{1}\ \left(p=\frac{p}{1}\right).$$

До п. 2.5 мы будем рассматривать положительные дроби (положительные рациональные числа), но для краткости прилагательное «положительный» будем опускать, подразумевая его.

Для любого натурального числа n справедливо равенство, называемое **основным свойством дроби**:

$$\frac{p}{q}=\frac{p\cdot n}{q\cdot n}. \qquad (1)$$

Например, $\frac{7}{3}=\frac{35}{15}$, $2=\frac{10}{5}$, $\frac{17}{2}=\frac{85}{10}$.

Можно сказать, что левая и правая части равенства (1) являются разными записями одного и того же положительного рационального числа.

Если числа p и q не имеют общих простых делителей, то дробь $\frac{p}{q}$ называют **несократимой**. Например, $\frac{2}{3}$ — несократимая дробь, а $\frac{6}{8}$ — сократимая.

Если $p<q$, то дробь называют **правильной**. Если $p\geqslant q$, то дробь называют **неправильной**. Например, $\frac{4}{8}$ — правильная дробь, а $\frac{9}{8}$ и $\frac{8}{8}$ — неправильные дроби.

Если знаменатель q дроби $\frac{p}{q}$ равен 10 или 100, или 1000, или 10 000, ..., т. е. если q есть некоторая степень числа 10, то обыкновенную дробь $\frac{p}{q}$ можно записать в виде **конечной десятичной дроби**.

Например, обыкновенные дроби

$$\frac{3}{10};\ \frac{7}{100};\ \frac{12\,437}{1000};\ \frac{234}{100\,000}$$

записываются соответственно в виде следующих конечных десятичных дробей:

$$0{,}3;\ 0{,}07;\ 12{,}437;\ 0{,}00234.$$

Каждую из этих конечных десятичных дробей называют **десятичным разложением** соответствующей обыкновенной дроби. При этом пишут равенства

$$\frac{3}{10}=0{,}3;\ \frac{7}{100}=0{,}07;\ \frac{12\,437}{1000}=12{,}437;\ \frac{234}{100\,000}=0{,}00234$$

и говорят, что данные обыкновенные дроби разложены в конечные десятичные дроби.

Надо иметь в виду, что, например, $\frac{7}{100}$ и 0,07 есть разные обозначения одного и того же числа. Первое — в виде обыкновенной дроби, а второе — в виде конечной десятичной дроби.

Очевидно также, что всякая конечная десятичная дробь может быть записана в виде обыкновенной дроби $\frac{p}{q}$, где p — натуральное число, а q — некоторая степень числа 10. Например,

$$3{,}0122=\frac{30\,122}{10^4};\qquad 0{,}00012=\frac{12}{10^5}.$$

Итак, **если знаменатель q обыкновенной дроби $\frac{p}{q}$ есть некоторая степень числа 10, то эта дробь может быть разложена в конечную десятичную дробь.**

Верно и обратное утверждение: **конечная десятичная дробь представляет собой десятичное разложение обыкновенной дроби, знаменатель которой есть некоторая степень числа 10**.

Отметим, что любое натуральное число можно записать в виде конечной десятичной дроби, например:

$$3=3{,}0=3{,}00=3{,}000=\dots$$

На практике такими обозначениями пользуются широко. Если, например, в результате измерений, которые производились с точностью до сантиметра, получилось 3 м, то пишут 3,00 м, подчеркивая этим, что полученный результат вычислен с точностью до 1 сантиметра (0,01 м).

58°. Что называют положительным рациональным числом (дробью)?

59°. Как называют числа p и q в записи дроби $\frac{p}{q}$?

60°. Какую дробь называют несократимой?

61. Можно ли натуральное число записать в виде обыкновенной дроби или конечной десятичной дроби? Приведите примеры.

62°. В чем заключается основное свойство дроби?

63. Можно ли записать конечную десятичную дробь в виде $\frac{p}{q}$? Приведите примеры.

64. Какую дробь называют правильной; неправильной? Приведите примеры.

65. Разложите числитель и знаменатель дроби на простые множители и сократите дробь, если возможно:

а) $\frac{12}{35}$; б) $\frac{48}{100}$; в) $\frac{105}{125}$; г) $\frac{24}{36}$;

д) $\frac{56}{100}$; е) $\frac{225}{300}$; ж) $\frac{123}{321}$; з) $\frac{111}{132}$.

Сократите дробь (**66—67**):

66. а) $\frac{16}{24}$; б) $\frac{240}{1000}$; в) $\frac{1240}{10\,000}$; г) $\frac{1024}{3456}$;

д) $\frac{315}{420}$; е) $\frac{630}{1470}$; ж) $\frac{660}{616}$; з) $\frac{770}{1320}$;

и) $\frac{143}{260}$; к) $\frac{112}{672}$; л) $\frac{450}{540}$; м) $\frac{777}{2121}$.

67*. а) $\frac{88}{99}$; б) $\frac{777}{888}$; в) $\frac{123}{321}$;

г) $\frac{945}{459}$; д) $\frac{1212}{2727}$; е) $\frac{123\,123}{327\,327}$.

68. Проверьте, является ли дробь несократимой:

а) $\frac{13}{21}$; б) $\frac{62}{81}$; в) $\frac{94}{98}$; г) $\frac{125}{250}$;

д) $\frac{17}{10}$; е) $\frac{63}{91}$; ж) $\frac{126}{129}$; з) $\frac{217}{279}$;

и) $\frac{765}{1071}$; к) $\frac{396}{591}$; л) $\frac{199}{200}$; м) $\frac{1999}{2000}$.

69. Запишите данные дроби в виде конечных десятичных дробей (т. е. разложите дроби в десятичные), и прочитайте полученные десятичные дроби:

а) $\frac{7}{10}$, $\frac{17}{100}$, $\frac{23}{10}$;

б) $\frac{53}{1000}$, $\frac{178}{10}$, $\frac{37\,481}{10\,000}$;

в) $\frac{21}{10\,000}$, $\frac{73}{10\,000\,000}$, $\frac{1276}{10\,000}$;

г) $\frac{453}{100}$, $\frac{7269}{100}$, $\frac{5676}{10}$.

70. Запишите данные конечные десятичные дроби в виде обыкновенных дробей:

а) 0,1; 0,21; 1,5;

б) 12,3; 0,007; 123,05;

в) 0,4; 0,12; 0,125;

г) 1,25; 3,75; 4,625;

д) 0,037; 2,503; 0,710.

2.2. Разложение обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь

Конечные десятичные дроби всегда можно записать в виде обыкновенных несократимых дробей. Например,

$$0{,}375=\frac{375}{1000}=\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3};$$

$$6{,}72=\frac{672}{100}=\frac{168}{25}=\frac{168}{5^2};$$

$$0{,}065=\frac{65}{1000}=\frac{13\cdot 5}{5^3\cdot 2^3}=\frac{13}{5^2\cdot 2^3};$$

$$0{,}034=\frac{34}{1000}=\frac{17\cdot 2}{5^3\cdot 2^3}=\frac{17}{5^3\cdot 2^2};$$

$$17{,}0=\frac{17}{1}.$$

Заметим, что после сокращения дробей получились знаменатели, которые не имеют других простых делителей, кроме 2 и 5.

Из этих примеров видно, что **если конечную десятичную дробь записать в виде обыкновенной несократимой дроби $\frac{p}{q}$, то ее знаменатель q не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5.**

Это утверждение доказывается и в общем случае.

Верно и обратное утверждение: **если знаменатель q несократимой дроби $\frac{p}{q}$ не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, то эта дробь разлагается в конечную десятичную дробь.**

Например, $\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{8}{10}=0{,}8.$

В этом примере числитель и знаменатель дроби мы умножили на 2, чтобы получить в знаменателе 10.

Аналогично поступаем и в следующих *примерах*:

$$\frac{501}{500}=\frac{501\cdot 2}{500\cdot 2}=\frac{1002}{1000}=1{,}002,$$

$$\frac{3}{40}=\frac{3\cdot 25}{40\cdot 25}=\frac{75}{1000}=0{,}075,$$

$$17=\frac{17}{1}=\frac{170}{10}=17{,}0.$$

Для разложения в конечную десятичную дробь обыкновенной несократимой дроби, знаменатель которой не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, существует два способа.

Один из них был рассмотрен выше, он сводится к умножению числителя и знаменателя дроби $\frac{p}{q}$ на соответствующую степень числа 2 или числа 5, чтобы в знаменателе получилась степень числа 10.

Вторым способом является известный способ деления числителя на знаменатель уголком. Например, обратим этим способом дробь $\frac{3}{40}$ в десятичную дробь:

$$\begin{array}{r|l}
3 & 40 \\
\cline{2-2}
\underline{30} & 0{,}075 \\
-300 & \\
\underline{280} & \\
-200 & \\
\underline{200} & \\
0 &
\end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{3}{40}=0{,}075.$$

До сих пор рассматривались десятичные дроби, называемые **конечными десятичными дробями**. Их так называют потому, что в записи после запятой стоит конечное число цифр.

В дальнейшем придется рассматривать и бесконечные десятичные дроби. В их записи после запятой бесконечно много цифр.

71°. Какие делители должен иметь знаменатель обыкновенной несократимой дроби, чтобы она разлагалась в конечную десятичную дробь? Приведите примеры.

72°. Какими способами можно разложить обыкновенную дробь в десятичную? Приведите примеры.

73. Какие простые множители содержит знаменатель дроби:

а) $\frac{1}{64}$; б) $\frac{1}{48}$; в) $\frac{1}{56}$; г) $\frac{1}{24}$;

д) $\frac{1}{128}$; е) $\frac{1}{78}$; ж) $\frac{1}{256}$; з) $\frac{1}{625}$?

74. Найдите несократимые дроби, равные данным:

а) $\frac{24}{60}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{21}{30}$; б) $\frac{65}{100}$, $\frac{94}{100}$, $\frac{8}{1000}$.

75. Запишите десятичную дробь в виде обыкновенной несократимой дроби:

а) 0,4; б) 0,12; в) 0,125;
г) 1,2; д) 0,45; е) 0,0018.

76. Запишите дробь в виде дроби, у которой знаменатель является степенью числа 10:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{1}{25}$;

д) $\frac{11}{20}$; е) $\frac{9}{8}$; ж) 3; з) $\frac{7}{400}$.

77. Разложите данные обыкновенные дроби в десятичные двумя способами: $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{24}{15}$.

78. Разложите данные дроби в десятичные с помощью деления уголком:

а) $\frac{7}{5}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{48}{15}$; б) $\frac{3}{2000}$, $\frac{17}{40}$, $\frac{28}{140}$;

в) $\frac{3}{12}$, $\frac{7}{56}$, $\frac{6}{24}$; г) $\frac{7}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{5}$;

д) $\frac{3}{25}$, $\frac{12}{75}$, $\frac{17}{200}$; е) $\frac{123}{20}$, $\frac{783}{40}$, $\frac{324}{25}$;

ж) $\frac{625}{125}$, $\frac{860}{400}$, $\frac{33}{60}$; з) $\frac{1024}{256}$, $\frac{804}{400}$, $\frac{624}{120}$.

79°. Возможно ли разложение данной дроби в конечную десятичную дробь:

а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{6}{48}$; в) $\frac{7}{352}$;

г) $\frac{12}{56}$; д) $\frac{120}{38}$; е) $\frac{12}{96}$?

2.3. Периодические десятичные дроби

Из изложенного в предыдущем пункте следует, что всякая несократимая дробь $\frac{p}{q}$ разлагается в конечную десятичную дробь тогда и только тогда, когда ее знаменатель q не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5.

Поэтому, если знаменатель несократимой дроби $\frac{p}{q}$ имеет простой делитель, отличный от 2 и 5, то эта дробь не разлагается в конечную десятичную дробь, и, применив к ней способ деления уголком, нельзя получить конечную десятичную дробь.

Пример 1. Пусть дано число $\frac{7}{9}$. Это несократимая дробь, и ее знаменатель имеет простой делитель 3, т. е. делитель, отличный от 2 и 5. Поэтому число $\frac{7}{9}$ заведомо не разлагается в конечную десятичную дробь. Убедимся в этом, разделив числитель данной дроби на знаменатель уголком:

$$
\begin{array}{r|l}
7 & 9 \\ \cline{2-2}
-70 & 0{,}777\ldots \\
\underline{63} & \\
-70 & \\
\underline{63} & \\
-70 & \\
\underline{63} & \\
70 & \\
\ldots &
\end{array}
$$

На каждом этапе этих вычислений получается один и тот же остаток 7, а в частном одна и та же цифра 7.

Процесс этот бесконечный (не имеет конца). Он приводит к выражению

$$0{,}777...,$$

где точки означают, что цифра 7 периодически повторяется бесконечно много раз, т. е. на любом месте (разряде) после запятой в этом выражении стоит одна и та же цифра 7.

Выражение 0,777... называют **бесконечной периодической десятичной дробью** или просто **периодической дробью**. Его записывают следующим образом: 0,(7) и читают: нуль целых и семь в периоде. Цифру (7) называют периодом дроби 0,(7).

Говорят, что число $\frac{7}{9}$ представлено в виде периодической дроби 0,(7) или что число $\frac{7}{9}$ разложено в периодическую дробь 0,(7). При этом пишут:

$$\frac{7}{9}=0{,}777...=0{,}(7).$$

Выражения $\frac{7}{9}$ и 0,(7) являются разными обозначениями одного и того же числа в виде обыкновенной дроби $\frac{7}{9}$ и в виде периодической дроби 0,(7).

Пример 2. Дробь $\frac{2}{99}$ несократимая, и ее знаменатель имеет простые делители, отличные от 2 и 5, поэтому ее десятичное разложение не может быть конечным.

В самом деле,

$$\begin{array}{l|l} 2 & 99 \\ \hline \underline{20} & 0{,}0202... \\ \underline{200} & \\ \quad 2... & \end{array}$$

Процесс деления числителя на знаменатель уголком здесь бесконечный. Он приводит к выражению

$$0{,}0202...,$$

где точки означают, что группа цифр (02) периодически повторяется бесконечно много раз. Это выражение также называют **периодической дробью**. Его записывают так: 0,(02) и читают: нуль целых и нуль два в периоде. Группу цифр (02) называют периодом дроби 0,(02).

Говорят, что число $\frac{2}{99}$ представимо в виде периодической дроби 0,(02) или его можно разложить в периодическую дробь 0,(02). При этом пишут:

$$\frac{2}{99}=0{,}0202...=0{,}(02).$$

Применяя способ деления уголком, получим следующие равенства:

1) $\frac{17}{99}=0,1717...=0,(17)$;

2) $\frac{143}{45}=3,1777...=3,1(7)$;

3) $\frac{101}{900}=0,11222...=0,11(2)$.

Правые части этих равенств читаются так:

1) нуль целых и семнадцать в периоде;

2) три целых, одна десятая и семь в периоде;

3) нуль целых, одиннадцать сотых и два в периоде.

В этих примерах несократимые дроби, знаменатели которых имеют простые делители, отличные от 2 и 5, были представлены в виде периодических дробей.

Верно и общее утверждение: если применить правило деления «уголком» к любой несократимой дроби $\frac{p}{q}$, у которой знаменатель имеет простые делители, отличные от 2 и 5, то получится бесконечная периодическая дробь.

Приписывая к конечной десятичной дроби бесконечно много нулей, мы также превращаем ее в бесконечную периодическую дробь с периодом 0.

Например,

$$27=27,0=27,000\ldots=27,(0);$$
$$0,354=0,354000\ldots=0,354(0).$$

Следовательно, любое целое число и любую конечную десятичную дробь можно считать частным случаем бесконечной периодической десятичной дроби.

Таким образом, справедливо, утверждение: **всякое положительное рациональное число $\frac{p}{q}$ разлагается в бесконечную периодическую десятичную дробь.**

Верно и обратное утверждение: **любая периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого положительного рационального числа $\frac{p}{q}$.**

Оба эти утверждения будут обоснованы в следующем пункте.

80°. В каком случае несократимая обыкновенная дробь не разлагается в конечную десятичную дробь?

81°. Каким способом разлагается любая обыкновенная дробь в десятичную?

82. Какие десятичные дроби могут получиться при делении уголком числителя обыкновенной дроби на знаменатель?

83. Как узнать, разлагается обыкновенная дробь в конечную или же в бесконечную десятичную дробь? Приведите примеры.

84. Как можно записать конечную десятичную дробь или натуральное число в виде бесконечной десятичной дроби? Приведите примеры.

85. Напишите периодические дроби, равные обыкновенным дробям:

а) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{12}{5}$, 12; б) $\frac{24}{30}$, $\frac{36}{48}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{45}{63}$;

в) $\frac{20}{41}$, $\frac{15}{37}$, $\frac{5}{21}$, $\frac{17}{42}$; г) $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{9}$;

д) $\frac{13}{99}$, $\frac{25}{99}$, $\frac{71}{99}$, $\frac{42}{99}$; е) $\frac{123}{999}$, $\frac{12}{999}$, $\frac{5}{999}$.

86. Подберите обыкновенную дробь, равную периодической дроби:

а) 0,(8); б) 0,(4); в) 0,(13);
г) 0,(37); д) 0,(27); е) 0,(125).

87*. Определите цифру сотого разряда после запятой в записи периодической дроби:

а) 0,(3); б) 0,(25); в) 0,(123);
г) 0,5(3); д) 5,2(13); е) 7,2(51).

2.4*. Периодичность десятичного разложения обыкновенной дроби

Зададим произвольное положительное рациональное число в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$. Покажем, что **если разделить числитель дроби на знаменатель уголком, то в частном получим либо конечное, либо бесконечное периодическое ее десятичное разложение.**

Мы уже знаем, когда может получиться конечное десятичное разложение. Для этого q не должно иметь других простых делителей, кроме 2 и 5. В остальных случаях может быть только бесконечное десятичное разложение, которое является периодическим.

Пример 1. Пусть надо найти десятичное разложение несократимой дроби $\frac{1372}{65}$.

Будем делить 1372 на 65 уголком:

$$
\begin{array}{rl}
-1372 & \big|\ 65 \\
130 & \big|\ \overline{21{,}1076923076\ldots} \\
 & \quad\ \ * \quad\ \ * \\
 & \quad\ \ * \quad\ \ * \\
 & \qquad\quad\ \ * \\
-72 & \\
65 & \\
* \quad -\boxed{7}0 & \\
65 & \\
** \quad -\boxed{5}00 & \\
455 & \\
-\boxed{45}0 & \\
390 & \\
-\boxed{60}0 & \\
585 & \\
-\boxed{15}0 & \\
130 & \\
-\boxed{20}0 & \\
195 & \\
*** \quad -\boxed{5}00 & \\
455 & \\
\boxed{45} & \\
\ldots &
\end{array}
$$

Здесь одной звездочкой отмечен тот этап вычислений, когда снесена последняя цифра делимого. Получаемые после этого остатки заключены в прямоугольники. Мы видим, что остатки, отмеченные двумя и тремя звездочками, равны между собой. Это показывает, что процесс деления носит периодический характер и приводит к бесконечной периодической десятичной дроби, т. е.

$$\frac{1372}{65}=21{,}1(076923).$$

То, что десятичное разложение дроби $\frac{1372}{65}$ должно быть бесконечным периодическим, можно объяснить иначе.

Данная дробь несократимая, и ее знаменатель 65 имеет простой делитель 13, отличный от 2 и 5. Следовательно, десятичное разложение числа $\frac{1372}{65}$ не может быть конечным, т. е. возникающие при делении остатки положительны (не равны нулю) на любом этапе деления. В то же время каждый остаток меньше 65, т. е. он равен одному из чисел 1, 2, 3, ..., 63, 64. Но тогда, если мы будем рассматривать подряд остатки, начиная с отмеченного одной звездочкой, то среди первых 65 из них обязательно должны найтись два равных между собой. Это и показывает, что мы должны получить в частном периодическую дробь.

Эти рассуждения проводятся для любой несократимой дроби $\frac{p}{q}$, знаменатель которой q имеет хотя бы один простой делитель, отличный от 2 и 5.

Если делить p на q уголком, то наступит такой этап, когда цифры делимого будут снесены. Если рассмотреть подряд все возникающие, начиная с этого момента, q остатков (все они положительны и каждый из них меньше q), то среди них всегда окажется два равных между собой, а это и показывает, что процесс деления бесконечный периодический.

Итак, доказано, что **всякое положительное рациональное число $\frac{p}{q}$ разлагается в бесконечную периодическую десятичную дробь**.

Напомним, что конечную десятичную дробь мы тоже называем периодической дробью (с периодом 0).

Верно и обратное утверждение: **всякая периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого положительного рационального числа**.

Ниже на примерах мы покажем, как можно находить это число.

Пример 2. Запишем периодическую дробь 0,(8) в виде обыкновенной дроби.

Для этого обозначим искомую дробь через x. Тогда справедливо равенство

$$x = 0,(8). \tag{1}$$

Умножая это равенство на 10, получим:

$$10x = 8,(8), \tag{2}$$

$$\text{или } 10x = 8 + 0,(8).$$

Вычитая равенство (1) из равенства (2), находим, что

$$10x - x = 8,$$

откуда

$$x = \frac{8}{9}.$$

Применив к дроби $\frac{8}{9}$ способ деления уголком, получим, что эта дробь действительно равна периодической дроби 0,(8).

Пример 3. Запишем периодическую дробь 2,35(7) в виде обыкновенной дроби.

Обозначим искомую дробь через x, тогда справедливо равенство

$$x = 2,35(7).$$

Умножая это равенство на 100 и на 1000, получим, что справедливы равенства:

$$100x = 235,(7), \tag{3}$$
$$1000x = 2357(7). \tag{4}$$

Вычитая равенство (3) из равенства (4), находим, что

$$1000x - 100x = 2357 - 235,$$

откуда

$$x = \frac{2357 - 235}{900} = \frac{2122}{900}.$$

Применив к дроби $\frac{2122}{900}$ способ деления уголком, получим, что эта дробь действительно равна периодической дроби 2,35(7).

Пример 4. Запишем периодическую дробь 0,(0108) в виде обыкновенной дроби.

Обозначим искомую дробь через x:

$$x = 0,(0108).$$

Умножим это равенство на 10 000:

$$10\,000x = 108,(0108).$$

Вычитая первое равенство из второго, получим:

$$10\,000x - x = 108 - 0,$$

откуда

$$x = \frac{108 - 0}{9999} = \frac{108}{9999}.$$

Аналогично рассуждая, получим, что

$$2,4(0) = \frac{240 - 24}{90} = 2,4, \qquad 2,3(9) = \frac{239 - 23}{90} = 2,4.$$

Следовательно,

$$2,4 = 2,4(0) = 2,3(9).$$

Аналогично показывается, что

$$7,25 = 7,25(0) = 7,24(9),$$
$$0,031 = 0,031(0) = 0,030(9),$$
$$12,3018 = 12,3018(0) = 12,3017(9).$$

Таким образом, любую периодическую дробь с периодом 9 всегда можно заменить соответствующей конечной десятичной дробью.

З а м е ч а н и е. При делении числителя на знаменатель уголком десятичное разложение с периодом 9 получиться не может, поэтому обычно не рассматривают периодические дроби с периодом 9.

88°. Какие обыкновенные дроби разлагаются в периодические дроби с периодом 0?

89°. Сколько цифр содержит период десятичного разложения обыкновенной дроби $\frac{6}{7}$?

90. Покажите на примере, как периодическая дробь с периодом 9 превращается в конечную десятичную дробь.

91. Запишите периодические дроби в виде обыкновенных дробей:

а) 1,(0); 0,(3); 0,(7);

б) 0,1(2); 1,12(3); 7,5(4);

в) 0,(12); 1,0(12); 8,7(21);

г) 23,5(0); 23,5(1); 23,5(13); 23,5(127).

92. Найдите десятичное разложение обыкновенной дроби:

а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{17}{25}$; в) $\frac{689}{4950}$; г) $\frac{5}{16}$.

93. Найдите периодическую дробь, равную данной обыкновенной дроби:

а) $\frac{7}{40}$; б) 19; в) $\frac{1}{7}$; г) $\frac{3}{11}$;

д) $\frac{5}{9}$; е) $\frac{17}{99}$; ж) $\frac{8}{999}$.

2.5. Десятичное разложение рациональных чисел

Если перед натуральным числом поставить знак «+» (плюс), то получим равное ему число. Поэтому, например, пишут

$$2=+2, \quad +100=100.$$

Поставив же перед натуральным числом знак «−» (минус), получим противоположное ему отрицательное число, называемое целым отрицательным числом. Например, числа

$$-2, \quad -9, \quad -123$$

— целые отрицательные.

Натуральные числа, целые отрицательные числа и число нуль образуют **множество целых чисел**.

Отметим, что сумма, разность и произведение целых чисел — всегда целое число, а частное двух целых чисел не всегда целое.

Поставив перед обыкновенной дробью (положительным рациональным числом), знак «+», получим равную ей дробь. Поэтому, например, пишут

$$\frac{123}{973}=+\frac{123}{973}; \quad +\frac{117}{91}=\frac{117}{91}.$$

Поставив перед положительной дробью знак «—», получим противоположную ей — отрицательную дробь, называемую отрицательным рациональным числом.

Примеры отрицательных рациональных чисел:

$$-\frac{1}{3};\ -\frac{7}{2};\ -\frac{9}{4};\ -2.$$

Знак «—», стоящий перед отрицательной дробью, можно записать или в числитель, или в знаменатель дроби. Поэтому, например, пишут:

$$-\frac{1}{3}=\frac{-1}{3};\ -\frac{7}{2}=\frac{7}{-2}.$$

Положительные дроби, отрицательные дроби и число нуль образуют **множество рациональных чисел**.

Сумма, разность произведение и частное рациональных чисел являются рациональными числами (на нуль делить нельзя!).

Любое рациональное число может быть записано в виде $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа и $q \neq 0$.

Ранее было показано, что любое положительное рациональное число разлагается в периодическую дробь.

Поставив перед ней знак «+», получим равную ей дробь. Поэтому, например, пишут:

$$+\frac{237}{99900}=0{,}00(237)=+0{,}00(237).$$

Поставив же перед положительной периодической дробью знак «—», получим отрицательную периодическую дробь, например:

$$-0{,}00(237)=-\frac{237}{99900}.$$

Периодическую дробь в левой части этого равенства называют десятичным разложением числа, записанного в правой части.

Отметим, что число нуль также может быть записано в виде нулевой периодической дроби:

$$0=0{,}(0)=+0{,}(0)=-0{,}(0).$$

Итак, **каждое рациональное число может быть разложено в периодическую дробь, а каждая периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого рационального числа.**

94°. а) Является ли любое целое число рациональным?

б) Является ли любое рациональное число целым?

95°. В каком виде можно записать любое рациональное число?

96°. Как сравнивают рациональные числа, находят их сумму, разность, произведение, частное?

97°. а) В результате каких действий с целыми числами всегда получается целое число?

б) В результате каких действий с рациональными числами всегда получается рациональное число?

в) Может ли сумма (произведение) двух целых чисел быть рациональным числом?

г) Может ли сумма (произведение) двух рациональных чисел быть целым числом?

98. Сравните числа:

а) $\frac{3}{8}$ и $-\frac{5}{9}$; б) $-\frac{3}{5}$ и $-\frac{4}{5}$;

в) $-\frac{3}{7}$ и 0; г) $\frac{8}{9}$ и 0;

д) $-\frac{5}{28}$ и $-\frac{1}{7}$; е) $-\frac{13}{24}$ и $-\frac{17}{26}$;

ж) $-\frac{98}{97}$ и $-\frac{99}{98}$; з) $-\frac{97}{98}$ и $-\frac{98}{99}$;

и) $-\frac{1}{3}$ и $\frac{-1}{3}$; к) $\frac{2}{7}$ и $\frac{-2}{-7}$;

л) $-\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{-5}$; м) $\frac{3}{4}$ и $-\frac{3}{-4}$.

Выполните действия **(99—100)**:

99. а) $-\frac{12}{25}+\frac{3}{50}$; б) $-\frac{11}{48}+\left(-\frac{3}{16}\right)$; в) $-\frac{5}{27}-\left(-\frac{5}{18}\right)$;

г) $-\frac{3}{7}\cdot\frac{8}{9}$; д) $\frac{24}{25}:\frac{4}{5}$; е) $\frac{71}{78}+\frac{17}{91}$;

ж) $\frac{50}{49}-\frac{15}{56}$; з) $-\frac{2}{5}\cdot\left(-32\frac{1}{2}\right)$; и) $-\frac{32}{77}:\frac{64}{55}$.

100. а) $-3{,}28+1{,}75$; б) $-4{,}8+(-0{,}48)$;

в) $3{,}17-(-0{,}63)$; г) $-0{,}48\cdot(-0{,}55)$;

д) $-0{,}35:0{,}2$; е) $-0{,}35:0{,}03$;

ж) $0{,}25\cdot(-0{,}32)$; з) $-4{,}6-3{,}2$.

101°. а) Любое ли рациональное число может быть разложено в периодическую дробь?

б) Любая ли периодическая дробь есть запись некоторого рационального числа?

102. Запишите пять отрицательных периодических десятичных дробей.

Запишите рациональные числа в виде периодических десятичных дробей **(103—104)**:

103. а) $-\frac{3}{7}$; б) $\frac{9}{16}$; в) $-\frac{511}{90}$; г) $\frac{17}{99}$.

104. а) $-\frac{1}{2}$; 0; $-1{,}24$; б) $\frac{1}{3}$; $-\frac{4}{7}$; $2\frac{5}{13}$;

в) $2\frac{24}{33}$; $-\frac{120}{210}$; $\frac{57}{16}$; г) $-\frac{21}{90}$; $1\frac{16}{90}$; $-3\frac{4}{7}$.

105*. Выразите в виде обыкновенной дроби периодическую дробь:

а) $-0,(3)$; б) $-1,(2)$; в) $-2,(5)$;
г) $-0,(17)$; д) $-3,(18)$; е) $-1,(05)$;
ж) $2,(0)$; з) $-0,(0)$.

§ 3. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

3.1. Иррациональные числа

До сих пор мы рассматривали бесконечные десятичные периодические дроби, но существуют и **бесконечные десятичные непериодические дроби.**

Рассмотрим положительную бесконечную десятичную дробь

$$0,1011011101111\ldots,$$

в которой после запятой записаны цифры: единица, нуль, две единицы, нуль, три единицы, нуль и т. д. У этой дроби никакая группа цифр не является периодом, то есть эта дробь непериодическая. Это показывает, что данная дробь не может быть десятичным разложением какого-либо рационального числа. Ее называют иррациональным (нерациональным) числом.

Вот еще примеры положительных иррациональных чисел — бесконечных непериодических десятичных дробей:

$$0,01001000100001\ldots,$$
$$17,12345678\ldots.$$

У первой дроби после запятой записаны цифры: нуль, единица, два нуля, единица, три нуля, единица, четыре нуля и т. д. У второй — после запятой записаны в возрастающем порядке числа натурального ряда.

Если перед числами поставить знак «$+$», то получим равные им числа, например:

$$0,01001000100001\ldots = +0,01001000100001\ldots;$$
$$17,123456789101112\ldots = +17,123456789101112\ldots.$$

Поставив перед положительной дробью знак «—», получим противоположную ей отрицательную дробь. Например, дроби

$$-0,01001000100001\ldots,$$
$$-17,12345678\ldots$$

есть отрицательные бесконечные непериодические дроби — отрицательные иррациональные числа.

Вообще, произвольную бесконечную непериодическую десятичную дробь называют **иррациональным числом.**

Если иррациональное число обозначить буквой, например,

$$a = 0,010010001\ldots,$$

то говорят, что правая часть этого равенства есть десятичное разложение числа a.

106°. Запишите три положительные бесконечные непериодические дроби. Как называют определяемые ими числа?

107. Запишите три отрицательных иррациональных числа.

108°. Какие из данных чисел являются рациональными, какие иррациональными:

а) 0,275; 0,(2); 1,32323232... ;

б) 2,7(1828); 3,01234567891011... ; 1,15(45)?

109. Запишите четыре числа, являющиеся элементами множества:

а) натуральных чисел;
б) положительных чисел;
в) отрицательных чисел;
г) целых чисел;
д) рациональных чисел;
е) иррациональных чисел;
ж) четных чисел;
з) простых чисел;
и) нечетных чисел;
к) чисел, больших 3;
л) составных чисел;
м) чисел, кратных 3.

110. Запишите два числа, одновременно являющиеся:

а) рациональными и отрицательными;
б) целыми и кратными 5;
в) целыми и положительными;
г) простыми и большими 50.

3.2. Понятие действительного числа

Рациональные и иррациональные числа называют действительными числами.

Таким образом, **любое действительное число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби. Если число рациональное, то дробь периодическая, если число иррациональное, то дробь непериодическая.**

Число до запятой у положительной бесконечной десятичной дроби называют **целой частью этой дроби**. Первую цифру после запятой у бесконечной десятичной дроби называют **цифрой первого разряда** этой дроби, вторую цифру после запятой — **цифрой второго разряда**, третью — **цифрой третьего разряда** и т. д.

Для записи произвольной бесконечной десятичной дроби, отличной от нуля, пользуются буквами.

Пусть дана положительная бесконечная десятичная дробь. Целую ее часть обозначим через α_0. Таким образом, α_0 есть нуль или натуральное число. Цифру первого разряда обозначим через α_1, цифру второго разряда — через α_2, цифру третьего разряда — через α_3 и т. д. В результате наша положительная десятичная дробь запишется следующим образом:

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots .$$

При этом число α_0 или хотя бы одна из цифр α_1, α_2, ... отличны от нуля. Иначе данное число было бы нулем.

Поставив перед положительной десятичной дробью знак «—», получим отрицательную десятичную дробь

$$-\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots .$$

Числа (дроби) $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ и $-\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ называют **противоположными числами.**

Если одно из противоположных чисел обозначить буквой a, то другое обозначают через $-a$.

Если a — положительное число, то $(-a)$ — отрицательное; если же a — отрицательное число, то $(-a)$ — положительное; но если $a=0$, то и $-a=0$.

Абсолютной величиной (или **модулем**) действительного числа a называют:

само число a, если a — положительное число;

нуль, если a — нуль;

число $-a$, если a — отрицательное число.

Абсолютная величина действительного числа a обозначается $|a|$. Таким образом,

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a>0, \\ 0, \text{ если } a=0, \\ -a, \text{ если } a<0. \end{cases}$$

Например, пусть

$$a=0{,}10110111\ldots,$$
$$b=-2{,}12345678910 11\ldots,$$
$$c=0{,}(0).$$

Тогда

$$|a|=0{,}10110111\ldots,$$
$$|b|=2{,}1234567891011\ldots,$$
$$|c|=0{,}(0).$$

111°. Какое число называют:

а) рациональным;

б) иррациональным;

в) действительным?

112°. Что называют целой частью положительной бесконечной дроби?

113°. Что называют абсолютной величиной действительного числа?

114°. Какие числа называют противоположными?

115°. Как обозначают число, противоположное числу a?

116°. Если число обозначили $-a$, то значит ли это, что оно отрицательное?

117°. а) Любое ли иррациональное число является действительным?

б) Каждое ли действительное число является иррациональным?

в) Известно, что π — число иррациональное и что $\pi \approx 3{,}14$. Являются ли действительными числами π и $3{,}14$?

г) Существует ли рациональное число, обращающееся в бесконечную непериодическую дробь?

118. а) В каком случае верно равенство:

$$|a| = a; \quad |a| = -a?$$

б) Найдите абсолютную величину (модуль) числа:

$-2,(3)$; $-0,5777...$; $-12,0(12)$; $3,17(2)$; $-0,(0)$.

в) Назовите число, противоположное числу:

$$2,5(3); \quad -1,(72); \quad -0,12(37).$$

3.3. Сравнение действительных чисел

Пусть заданы две бесконечные десятичные дроби (считаем, что они не имеют период 9).

При сравнении бесконечных десятичных дробей следует руководствоваться следующими правилами.

Правило 1. Две бесконечные десятичные дроби (т. е. действительные числа) равны между собой, если они имеют одинаковые знаки и их абсолютные величины имеют одинаковые целые части и одинаковые цифры соответствующих разрядов.

В других случаях бесконечные десятичные дроби не считаются равными.

Единственным исключением из этого правила является число 0, которое не изменяется, если поставить перед ним знак «$-$» или «$+$»:

$$0 = 0{,}000... = -0{,}000 = +0{,}000... .$$

Правило 2. Отрицательная бесконечная десятичная дробь меньше 0 и меньше любой положительной бесконечной десятичной дроби. Число 0 меньше любой положительной десятичной дроби.

Правило 3. Если целые части двух положительных десятичных дробей разные, то та дробь больше, у которой целая часть больше. А если целые части одинаковые, то надо обратиться к наименьшему разряду, для которого цифры данных дробей различны. Та из дробей больше, у которой цифра этого разряда больше.

Из двух отрицательных десятичных дробей та больше, у которой абсолютная величина меньше.

Если действительные числа (бесконечные десятичные дроби) a и b равны, то пишут $a=b$. Если же a меньше b, то пишут: $a<b$ или $b>a$. Наконец, если a не равно b, то пишут: $a\neq b$.

Пример. Сравним числа $-3,1$ и $-3,(1)$.

Так как
$$|-3,1|=3,1=3,1000\ldots,$$
$$|-3,(1)|=3,(1)=3,1111\ldots,$$
$$3,1<3,(1),$$
то
$$-3,1>-3,(1).$$

Действительно, модули этих чисел имеют одинаковые целые части и одинаковые цифры первого разряда, но цифра второго разряда первой дроби меньше цифры второго разряда второй дроби, поэтому модуль первой дроби меньше модуля второй. Так как эти дроби отрицательные, то по правилу сравнения получаем, что
$$-3,1>-3,(1)$$

119°. В каком случае два действительных числа a и b равны ($a=b$)?

120°. В каком случае два действительных числа a и b не равны ($a\neq b$)?

121°. Сформулируйте правила сравнения действительного числа с нулем.

122°. Как сравнивают:
а) положительные действительные числа;
б) отрицательные действительные числа?

123. Пусть $|a|=|b|$. В каком случае:
а) $a=b$; б) $a\neq b$?

124*. В каком случае:
а) если $a>b$, то и $|a|>|b|$;
б) если $a>b$, то и $|a|<|b|$?

125. Запишите в неубывающем порядке следующие действительные числа:

$a=3,(07)$;	$b=3,(0008)$;
$c=-2,303003000\ldots$;	$d=3,(007)$;
$e=-0,23(1)$;	$f=-0,231(17)$.

126. Запишите в невозрастающем порядке следующие действительные числа:

$a=-2,(0)$; $b=5,1(01)$; $c=-0,00(1)$;
$d=0,(001)$; $e=+0,(0)$.

127. Покажите справедливость двойного неравенства:

а) $0,75757<0,(75)<0,75758$;
б) $3,023023<3,(023)<3,023024$.

128. Сравните действительные числа:

а) $2,42424242...$ и $-2,42424242...$;
б) $5,4444444...$ и $5,5444444...$;
в) 0 и $-10,(4)$ г) $0,(1)$ и $0,(2)$;
д) $\frac{1}{9}$ и $0,(1)$; е) $0,333333$ и $\frac{1}{3}$;
ж) $-4,313131...$ и $-4,31311311131...$;
з) $0,(27)$ и $\frac{3}{10}$.

129. Расположите действительные числа в порядке возрастания:
а) $-0,142536$; $-2,(7)$; $0,125$; $0,1(25)$;
б) $1,(5)$; $0,(12)$; $-2,778$; $-2,(778)$.

130. Расположите числа в порядке убывания:
$\frac{1}{9}$; $-4,7(5)$; $0,1115$; $-4,7556$; $\frac{1}{8}$; $0,124$.

131. Сравните числа:
а) 5 и $5,(1)$; б) $0,(23)$ и $0,234$;
в) $1,2456$ и $1,24563$; г) $1,2456$ и $1,(3)$;
• д) $0,545454$ и $0,(54)$; е) $0,(4)$ и $0,(45)$.

132. Верно ли двойное неравенство:
а) $106,727272\leqslant106,(72)<106,727273$;
б) $-0,313131<-0,(3)\leqslant-0,313132$?

133. Для чисел $2,(1)$ и $2,111$ укажите хотя бы одно такое действительное число, которое было бы больше одного из этих чисел и меньше другого.

134. Сравните абсолютные величины чисел, поставьте между числами знак $>$, $=$ или $<$:
а) 5 и $5,001$; б) $2,6$ и $2,596$;
в) $2,3$ и $2\frac{1}{3}$; г) $4,7$ и $4,(7)$;
д) $\frac{1}{7}$ и $0,(142857)$; е) $\frac{1}{9}$ и $0,(12)$;
ж) $-2\frac{2}{3}$ и $-2,(67)$; з) $-0,001$ и $-0,002$.

3.4. Основные свойства действительных чисел

В математике принято считать, что сумма (разность, произведение и частное) действительных чисел есть действительное число и притом единственное (кроме случая, когда в частном действительных чисел делитель нуль — делить на нуль нельзя!).

Действительные числа обладают следующими *свойствами*:

1. Для любых двух действительных чисел a и b имеет место и притом только одно из соотношений:

$$a=b,\ a<b,\ a>b.$$

2. Для любых действительных чисел a и b таких, что $a<b$, найдется такое действительное число c, что $a<c$ и $c<b$, т. е. $a<c<b$.

3. Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$ (свойство транзитивности неравенств).

4. Если $a<b$, то $a+c<b+c$ для любого действительного числа c.

5. Если $a<b$ и c — положительное число, то $a\cdot c<b\cdot c$.

Для любых действительных чисел a, b и c справедливы равенства:

1)	$a+b=b+a$;	(Переместительный закон сложения)
2)	$(a+b)+c=a+(b+c)$;	(Сочетательный закон сложения)
3)	$a\cdot b=b\cdot a$;	(Переместительный закон умножения)
4)	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$;	(Сочетательный закон умножения)
5)	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$;	(Распределительный закон)
6)	$a+0=a$;	
7)	$a+(-a)=0$;	
8)	$a-b=a+(-b)$;	
9)	$a\cdot 1=a$;	
10)	$a\cdot 0=0$;	
11)	$-a=(-1)\cdot a$;	
12)	$a\cdot\frac{1}{a}=1$ (если $a\neq 0$);	
13)	$a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$ (если $b\neq 0$).	

Равенство 1) показывает, что два действительных числа можно складывать в любом порядке.

Равенство 2) показывает: чтобы к сумме $(a+b)$ прибавить c, можно к a прибавить сумму $(b+c)$ — результат тот же самый. Отметим, что выражение $(a+b)+c$ записывают и так: $a+b+c$, т. е. пишут: $(a+b)+c=a+b+c$.

Равенство 3) показывает, что два действительных числа можно умножать в любом порядке.

Равенство 4) показывает: чтобы произведение $a\cdot b$ умножить на c, можно a умножить на $b\cdot c$. Пишут также:

$$(ab)c=abc.$$

Равенство 5) показывает, что если a умножить на сумму $(b+c)$, то получится такое же число, как если a умножить на b, затем a умножить на c и полученные произведения сложить.

Равенство 6) показывает, что прибавление нуля к любому числу не меняет последнего.

Равенство 7) утверждает, что сумма противоположных чисел есть число нуль.

Разность $a-b$ есть число, которое надо прибавить к b, чтобы получить a. Равенство 8) говорит о том, что это число можно записать в виде суммы a и $(-b)$, где $(-b)$ — число, противоположное числу b.

Равенство 9) утверждает, что умножение любого числа на единицу не меняет его.

Равенство 10) показывает, что умножение любого числа на нуль дает нуль.

Равенство 11) утверждает, что число, противоположное числу a, равно произведению a на число (-1).

Если $a \neq 0$, то $\frac{1}{a}$ называют **числом, обратным** a. Очевидно, что и a есть число,обратное $\frac{1}{a}$, поэтому оба эти числа называют **взаимно обратными**.

Равенство 12) утверждает, что произведение двух взаимно обратных чисел равно 1.

Частное $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ есть число, которое надо умножить на b, чтобы получить a.

Равенство 13) показывает, что это число равно произведению a на $\frac{1}{b}$.

Подчеркнем еще раз, что **делить на нуль нельзя**, поэтому запись $\frac{a}{0}$ бессмысленна для любого действительного числа a, в том числе и для $a=0$.

В заключение отметим, что данное в п. 1.2 определение степени числа остается в силе для любых действительных чисел. Сформулированные там *свойства степеней чисел* можно выразить следующим образом.

Пусть a и b — любые действительные числа, а m и n — произвольные натуральные числа, тогда справедливы равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$
$$(ab)^n = a^n \cdot b^n,$$
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Замечание. На практике действительные числа (т. е. бесконечные десятичные дроби) складывают, вычитают, умножают и делят приближенно. Дальше будет показано как это делается.

135°. Сформулируйте свойство транзитивности неравенств.

136°. Сохранится ли неравенство, если:

а) к обеим его частям прибавить действительное число;

б) обе его части умножить на положительное число;

в) обе его части умножить на нуль или отрицательное число?

Приведите примеры.

137°. Сформулируйте:

а) переместительный закон сложения;

б) переместительный закон умножения;

в) сочетательный закон сложения;

г) сочетательный закон умножения;

д) распределительный закон.

138°. а) Что получится, если к числу прибавить 0?

б) Чему равна сумма противоположных чисел?

в) Можно ли разность $a - b$ записать в виде суммы?

г) Что получится, если число умножить на 1; -1; 0?

д) Какое число называют обратным к числу a $(a \neq 0)$?

е) Какие числа называют взаимно обратными?

ж) Чему равно произведение двух взаимно обратных чисел?

139°. а) Что называют n-й степенью числа a?

б) Что называют основанием степени?

в) Что называют показателем степени?

г) Чему равно произведение степеней с одинаковыми показателями?

д) Чему равно произведение степеней с одинаковыми основаниями?

е) Чему равен показатель степени при возведении степени числа в степень?

140. Укажите какое-либо число, заключенное между данными числами a и b:

а) $a = 2{,}3$; $b = 2{,}4$;

б) $a = 3{,}2$; $b = 3{,}(2)$;

в) $a = -3{,}15$; $b = -3{,}14$;

г) $a = -5{,}(3)$; $b = -5{,}(21)$.

141. Некто задумал число, большее a, но меньшее b. Верно ли, что $a < b$?

Верно ли неравенство **(142—143)**:

142. а) $3{,}5 + 2{,}729 < 3{,}6 + 2{,}729$;

б) $-3{,}21 + 0{,}(4) < -3 + 0{,}(4)$;

в) $-5{,}6 + 3{,}2 < -5{,}1 + 3{,}(2)$;

г) $5 + 0{,}1 < 5{,}1 + 0{,}10110111...$?

143. а) $3{,}7 \cdot 0{,}8 < 3{,}8 \cdot 0{,}8$;

б) $-5{,}1 \cdot 0{,}(3) < -5 \cdot 0{,}(3)$;

в) $-4{,}7(1)\cdot 0{,}5 < -4{,}7\cdot 0{,}5$;

г) $-3{,}(8)\cdot 0{,}5 < -3{,}8\cdot 0{,}(5)$?

144°. Верно ли равенство:

а) $3\frac{1}{3}+0{,}(2)=0{,}(2)+3\frac{1}{3}$;

б) $(-5{,}1+3{,}(3))+7=-5{,}1+(3{,}(3)+7)$;

в) $(-5{,}4\cdot(-7))\cdot 2=-5{,}4\cdot((-7)\cdot 2)$?

145. Какими свойствами арифметических действий воспользовались при вычислениях:

а) $25\cdot 7\cdot 3\cdot 4=25\cdot 4\cdot 7\cdot 3=100\cdot 21=2100$;

б) $1{,}5\cdot 7=(1+0{,}5)\cdot 7=1\cdot 7+0{,}5\cdot 7=7+3{,}5=10{,}5$;

в) $6\frac{2}{5}+2\frac{2}{5}=6+\frac{2}{5}+2+\frac{2}{5}=6+2+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=8\frac{4}{5}$?

Вычислите **(146—147)**:

146. а) $3{,}(27)\cdot 5-3{,}(27)\cdot 4$;

б) $5{,}(21)\cdot 7+5{,}(21)\cdot 3$;

в) $3{,}(5)\cdot 7{,}3-7{,}3\cdot 3{,}(5)$;

г) $2{,}(7)\cdot 5{,}41-5{,}41\cdot 2{,}(7)$;

д) $13{,}(13)-13{,}(13)$; е) $-1\cdot 3{,}(51)$;

ж) $0\cdot 5{,}1234567...$; з) $1\cdot(-5{,}1234567...)$;

и) $1\cdot\frac{17}{19}$; к) $3\cdot\frac{1}{3}$;

л) $-3{,}4\cdot\frac{1}{-3{,}4}$; м) $-5\cdot\frac{1}{8}$;

н) $11{,}101101110...+(-11{,}101101110...)$.

147. а) $(3{,}2+(-1{,}7))+1{,}7$;

б) $(5{,}9+(-0{,}(7)))+0{,}(7)$;

в) $(5{,}4\cdot 1{,}7)\cdot\frac{1}{1{,}7}$; г) $(-2{,}(95)\cdot 5{,}28)\cdot\frac{1}{5{,}28}$.

3.5. Приближения чисел

Если число a_1 мало отличается от числа a, то пишут:

$$a\approx a_1$$

и говорят, что **число a приближенно равно числу a_1** или что **a_1 есть приближение числа a.**

Знак $\approx$ есть знак приближенного равенства.

Если при этом $a_1<a$, то a_1 называют **приближением a с недостатком** или **приближением a снизу**. Если же $a_1>a$, то a_1 называют **приближением a с избытком** или **приближением a сверху.**

Если случится, что $a_1=a$, то a_1 можно назвать как приближением a снизу, так и сверху.

Действительные числа, задаваемые бесконечными десятичными дробями, приближают конечными десятичными дробями. Сама запись бесконечной десятичной дроби подсказывает, как эти приближения подбирать. Рассмотрим *пример*.

Пусть $a=2{,}3(28)$.

Оборвем эту дробь на цифре второго разряда. Получим число 2,32, которое меньше, чем a.

Если у числа 2,32 увеличить цифру второго разряда на 1, то получим число 2,33, большее, чем a.

Таким образом,

$$2{,}32 < a < 2{,}33.$$

Откуда 2,32 есть приближение снизу числа a, а 2,33 есть его приближение сверху.

Пишут при этом: $a \approx 2{,}32$, $a \approx 2{,}33$ и говорят:

2,32 есть **приближение** числа a **с точностью до одной сотой с недостатком** (снизу);

2,33 есть **приближение** числа a **с точностью до одной сотой с избытком** (сверху).

Вместо слов «с точностью до одной сотой» говорят еще «с точностью до единицы второго разряда».

Так как третья цифра после запятой у числа a больше 5, то можно еще сказать, что 2,33 есть приближение числа a с точностью до одной сотой **с округлением**.

Рассуждая аналогично, получим, что

$$2{,}328 < a < 2{,}329,$$
$$a \approx 2{,}328, \ a \approx 2{,}329,$$

где 2,328 есть приближение a с точностью до 0,001 снизу и в то же время с округлением;

2,329 есть приближение a с точностью до 0,001 сверху.

Подобным образом для числа

$$b = -2{,}3(28)$$

имеем

$$-2{,}33 < b < -2{,}32.$$

Откуда

$$b \approx -2{,}33, \ b \approx -2{,}32,$$

и при этом

2,33 есть приближение b с точностью до 0,01 снизу и в то же время с округлением;

$-2{,}32$ есть приближение b с точностью до 0,01 сверху.

Отметим, что чем с большим числом разрядов мы будем брать приближение данного действительного числа, тем ближе будет это приближение к самому числу.

Введем понятие значащей цифры десятичной дроби.

Значащей цифрой десятичной дроби называют ее первую (слева направо) отличную от нуля цифру, а также все следующие за ней цифры.

Например, в числе 235 000 все цифры значащие; в числе 0,302 цифры, стоящие после запятой, значащие; в числе 0,003004 цифры, начиная с цифры 3, значащие.

Округлить число с точностью, например, до третьей значащей цифры — это значит округлить его до того разряда, где находится третья значащая цифра, заменив следующие цифры нулями. Например, приведенные ниже округления произведены с точностью до третьей значащей цифры:

$$3{,}7523 \approx 3{,}7500 = 3{,}75;$$
$$0{,}010278 \approx 0{,}010300 = 0{,}0103;$$
$$0{,}035021 \approx 0{,}035000 = 0{,}0350;$$
$$-0{,}02339 \approx -0{,}0234;$$
$$1{,}(73) = 1{,}7373... \approx 1{,}74;$$
$$0{,}012345... \approx 0{,}0123;$$
$$236\,678 \approx 237\,000 = 2{,}37 \cdot 10^5;$$
$$235\,000 \approx 235\,000 = 2{,}35 \cdot 10^5.$$

Теперь покажем, как надо приближенно складывать, вычитать, умножать и делить действительные числа.

Сумма (разность, произведение, частное) двух чисел считается приближенно равной сумме (разности, произведению, частному) их приближенных значений.

Чтобы правильно приближенно складывать, вычитать, умножать и делить числа, надо правильно их округлять. Как это делать, мы поясним на примерах.

Чтобы вычислить приближенно сумму (разность) двух чисел, надо округлить эти числа с одинаковой точностью, например до одной сотой, **затем сложить (вычесть) полученные приближения.**

Пример 1. Найдем приближенно сумму и разность чисел $a = 23{,}1834567$ и $b = -4{,}2375$, округлив их с точностью до одной сотой.

Решение. Округляя эти числа с точностью до одной сотой, находим, что $a \approx 23{,}18$, $b \approx -4{,}24$. Откуда и получаем ответ:

$$a + b \approx 18{,}94; \quad a - b \approx 27{,}42.$$

Отметим, что аналогично выполняют сложение и вычитание чисел, округленных с точностью до одной десятой, одной тысячной, до десятка, до тысячи и т. д.

Сформулируем правило приближенного умножения и деления чисел, округленных с точностью до третьей значащей цифры (аналогично выполняют приближенное умножение и деление чисел, округленных с точностью до первой, второй и т. д. значащей цифры).

Чтобы вычислить приближенно произведение (частное) двух чисел, надо округлить эти числа с точностью до одной и той же значащей цифры, например до третьей значащей цифры, **перемножить (разделить) полученные приближения и результат округлить до той же** (третьей) **значащей цифры.**

Пример 2. Пусть $a = 135{,}78665$, $b = 0{,}0068751$.

Вычислим $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ приближенно, округляя числа a и b с точностью до третьей значащей цифры.

Решение. Округлив с точностью до третьей значащей цифры, имеем:

$a \approx 136$, $b \approx 0{,}00688$, тогда

$a \cdot b \approx 136 \cdot 0{,}00688 = 0{,}93568 \approx 0{,}936$;

$\frac{a}{b} \approx \frac{136}{0{,}00688} = \frac{13\,600\,000}{688} = 19\,767{,}4... \approx 19\,800$,

$\frac{b}{a} \approx \frac{0{,}00688}{136} = 0{,}00005058... \approx 0{,}0000506$.

Ответ: $a \cdot b \approx 0{,}936$, $\frac{a}{b} \approx 19\,800$, $\frac{b}{a} \approx 0{,}0000506$.

Замечание. Точность вычислений находится в противоречии с простотой вычислений. Большая точность связана с употреблением большего количества цифр, меньшая — требует меньшего количества цифр.

Чем с большим количеством цифр брать приближения двух чисел, тем ближе будет сумма (разность, произведение, частное) этих приближений к сумме (разности, произведению, частному) этих чисел.

Например, пусть дано число $a = 1{,}445$ и требуется вычислить его квадрат.

Если округлим число и результат до первой значащей цифры, то получим $a^2 \approx 1 \cdot 1 = 1$, что отличается от точного результата (2,088025) примерно на 52%.

Если округлим число и результат до второй значащей цифры, то получим $a^2 \approx 1{,}4 \cdot 1{,}4 = 1{,}96 \approx 2{,}0$, что отличается от точного результата примерно на 4,2%.

Если же округлить число и результат до третьей значащей цифры, то получим $a^2 \approx 1{,}45 \cdot 1{,}45 = 2{,}1025 \approx 2{,}10$, что отличается от точного результата меньше чем на 0,6%.

148°. Как читается запись $a \approx a_1$?

149°. а) Какими числами приближают действительные числа?

б) Как получить более точные приближения действительного числа?

в) Какие цифры называют значащими в записи числа в виде десятичной дроби?

г) Что значит округлить число до второй значащей цифры?

150. Найдите приближение числа a с недостатком:

а) $a = 0{,}(2)$ с точностью до 0,001;

б) $a = 1{,}234567891011...$ с точностью до 0,01;

в) $a = 12{,}0(1)$ с точностью до 0,1.

151. Найдите приближение числа a с избытком:

а) $a = -0{,}(3)$ с точностью до единицы третьего разряда (после запятой);

б) $a = -1{,}2777...$ с точностью до единицы второго разряда;

в) $a = -12{,}0(01)$ с точностью до единицы первого разряда.

152. Найдите приближение числа с точностью до 0,01:

а) 127,(023); б) 0,1(27);

в) $-1{,}34(8)$; г) $-0{,}56789101112\ldots$.

153. Укажите значащие цифры числа:

а) 3,52; б) 0,352; в) 0,03520;

г) 7,405; д) 4,203; е) 0,005;

ж) 0,420; з) 7,0003; и) 10,0050;

к) 6,700; л) 0,00067; м) 0,0100.

154. Округлите число 1039,9301 до седьмой; шестой; пятой; четвертой; третьей значащей цифры.

155. Вычислите приближенно сумму, округлив данные числа с точностью до 0,1:

а) $3{,}288 + 0{,}123$;

б) $-1{,}236 + 2{,}555$;

в) $0{,}100100010\ldots + 0{,}238$;

г) $2{,}7(3) + 3{,}(42)$.

156. Вычислите приближенно разность, округлив данные числа с точностью до 0,01:

а) $1{,}4545 - 1{,}238$; б) $2{,}1641 - 3{,}1145$;

в) $7 - 0{,}(3)$; г) $1{,}(45) - 1{,}2$;

д) $2{,}1264 - 3{,}(1)$; е) $5{,}(7) - 2(5)$.

157. Выполните задания 155—156, округлив данные в них числа с точностью до 0,001.

158. Вычислите приближенно произведение, округлив данные числа с точностью до второй значащей цифры:

а) $2{,}35 \cdot 3{,}251$; б) $-4{,}3205 \cdot 2{,}503$;

в) $3 \cdot 2{,}(1)$; г) $0{,}56 \cdot 0{,}(3)$;

д) $0{,}(1) \cdot 0{,}(2)$; е) $12{,}(45) \cdot 10(1)$.

159. Вычислите приближенно частное, округлив данные числа с точностью до второй значащей цифры:

а) $3{,}57 : 0{,}259$; б) $-3{,}28 : 40{,}12$;

в) $12 : 0{,}(1)$; г) $0{,}(2) : 2$;

д) $4{,}(2) : 1{,}(3)$; е) $45{,}6(12) : 10{,}(2)$.

160. Выполните задания 158—159, округлив данные в них числа до третьей значащей цифры.

161*. Даны числа $a = 5{,}(1)$ и $b = 2{,}123456\ldots$. Сумма $a + b$ заключена между целыми числами $5 + 2 = 7$ и $6 + 3 = 9$:

$$7 < a + b < 9.$$

Здесь числа 5 и 2 приближения чисел a и b с точностью до 1 снизу, а числа 6 и 3 приближения чисел a и b с точностью до 1 сверху.

Получите более точные границы для суммы $a + b$, найдя приближения a и b с точностью до:

а) 0,1; б) 0,01; в) 0,001.

162. Длина окружности C вычисляется по формуле

$$C = 2\pi R,$$

где R — радиус окружности, π — иррациональное число, равное 3,1415926 ... . Определите границы для C при заданном радиусе 4,15 м с точностью до:
а) 0,1; б) 0,01; в) 0,001.

3.6. Длина отрезка

Рассмотрим несколько примеров измерения длины отрезка. За единичный отрезок (единицу длины) возьмем 1 дм (рис. 1). Обратите внимание: рисунки 1—5 даны в масштабе 1:2.

Пример 1. Отрезок AB, изображенный на рисунке 2, имеет длину 2 дм. То есть на отрезке AB укладывается точно 2 дм. Пишут $AB = 2$ дм.

Пример 2. На рисунке 3 в отрезке AB укладывается 2 дм с некоторым остатком, меньшим 1 дм. В этом случае говорят, что длина AB приближенно равна 2 дм с точностью до 1 дм с недостатком и пишут $AB \approx 2$ дм.

Масштаб 1 : 2

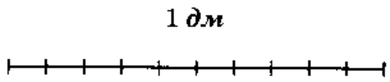


Рис. 1

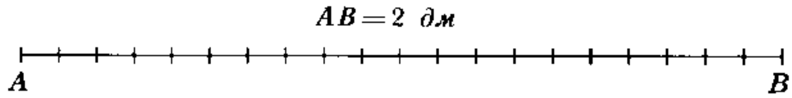


Рис. 2

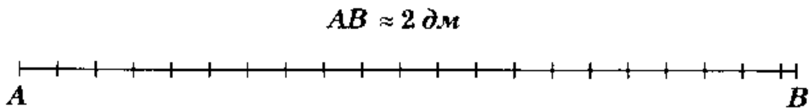


Рис. 3

Пример 3. На рисунке 4 в отрезке AB укладывается 2 дм с остатком, в котором содержится точно 1 см. В этом случае пишут $AB = 2{,}1$ дм.

Пример 4. На рисунке 5 в отрезке AB укладывается 2 дм с остатком, в котором содержится 1 см и остаток, меньший 1 см. В этом случае длина отрезка AB приближенно равна 2,1 дм с точностью до 0,1 дм с недостатком: $AB \approx 2{,}1$ дм.

***Масштаб* 1 : 2**

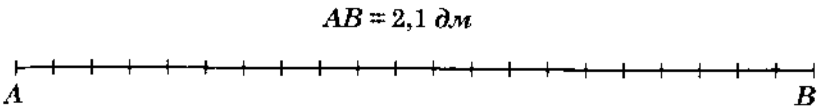


Рис. 4

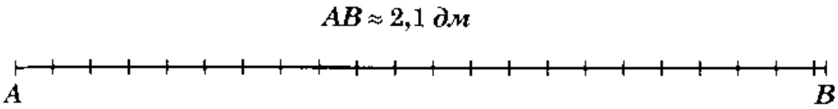


Рис. 5

Пример 5. Если в примере 4 во втором остатке укладывается точно 4 мм, то $AB = 2{,}14$ дм.

Пример 6. Если в примере 4 во втором остатке укладывается 4 мм с остатком, меньшим 1 мм, то говорят, что длина AB приближенно равна 2,14 дм с точностью до 0,01 дм с недостатком: $AB \approx 2{,}14$ дм.

Так же, как в примерах 1 — 6, можно измерять длины отрезков любой другой единицей длины: 1 см, 1 м, 1 км, ...

Пример 7. Если $AB = 0{,}2305$, то это значит, что длина отрезка AB меньше длины единичного отрезка (единицы длины); в AB укладывается 0,2 этой единицы с остатком, в котором содержится 0,03 единицы с остатком, в котором в свою очередь укладывается точно 0,0005 единицы.

Если при измерении данного отрезка AB при помощи заданной единицы длины, ее десятых, сотых, тысячных и т. д. долей на любом этапе измерения возникает остаток, то длина AB при помощи конечной дроби может быть выражена только приближенно. Точно же длина отрезка AB выражается бесконечной десятичной дробью:

$$AB = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots \quad (1)$$

Говорят, что отрезок AB имеет длину

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots;$$

здесь a — число, выраженное дробью (1), где

α_0 — приближенная длина отрезка AB с точностью до 1 с недостатком;

α_0,α_1 — приближенная длина отрезка AB с точностью до 0,1 с недостатком;

a_0,a_1a_2 — приближенная длина отрезка AB с точностью до 0,01 с недостатком и т. д.

Пример 8. Если $AB=3,(07)=3,070707...$, то

3 — приближенная длина отрезка AB с точностью до 1 с недостатком;

3,0 — приближенная длина отрезка AB с точностью до 0,1 с недостатком;

3,07 — приближенная длина отрезка AB с точностью до 0,01 с недостатком;

3,070 — приближенная длина отрезка AB с точностью до 0,001 с недостатком и т. д.

Отметим, что $3,(07)=3\frac{7}{99}$. Поэтому данное число можно рассматривать как длину отрезка, в котором укладывается 3 единицы (три единичных отрезка) и еще $\frac{7}{99}$ единицы.

Итак, пусть задан единичный отрезок, тогда произвольный отрезок AB имеет длину, равную некоторому положительному числу a. Верно и обратное утверждение: если задано любое положительное число a, то можно указать отрезок AB, длина которого равна этому числу.

На практике, чтобы начертить с помощью линейки этот отрезок AB, воспользовались бы его приближенной длиной, заданной десятичной дробью. Например, приняли бы, что $AB\approx 3,07$. Ведь обычные измерительные приборы приспособлены к десятичной системе счисления — единица длины делится на 10, 100, 1000, ... равных частей.

163°. Длина отрезка равна

$$a=a_0,a_1a_2a_3... .$$

Что обозначают через:

а) a_0; б) a_0,a_1; в) a_0,a_1a_2?

164. Дан квадрат со стороной 1 см. Верно ли, что существует действительное число, выражающее длину диагонали этого квадрата?

165. Определите на глаз длину и ширину страницы тетради (в сантиметрах). Найдите при помощи линейки приближение длины и ширины страницы тетради (с недостатком) с точностью до 1; с точностью до 0,1, принимая за единицу измерения 1 см.

166. Определите на глаз размеры крышки парты (стола) в сантиметрах. Проверьте свой глазомер, определив при помощи линейки приближение (с недостатком) длины и ширины крышки парты (стола) с точностью до 1 см.

167. С какой точностью (0,001; 0,01; 0,1; 1; 1000) вы взялись бы измерить длину улицы, если единица измерения 1 м?

168. На рисунке 6 изображены отрезки AB и CD. Принимая за единицу измерения отрезок CD, измерьте на глаз отрезок AB с точностью до 1 с недостатком. Проверьте свой глазомер с помощью линейки.

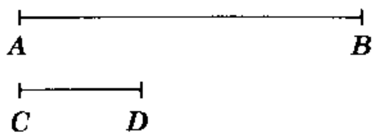


Рис. 6

3.7. Координатная ось

Зададим прямую, на которой выбрано **направление**, называемое **положительным**, и выбрана точка O, называемая **начальной точкой**. Зададим еще отрезок, длину которого примем за единицу — **единичный отрезок**.

Прямую, на которой выбраны начальная точка, положительное направление и единичный отрезок, называют координатной осью.

На рисунке 7 координатная ось нарисована горизонтально, с положительным направлением, идущим вправо от точки O. Но, вообще говоря, координатная ось может быть расположена вертикально или еще как-нибудь, и положительное направление на ней может быть выбрано так, как это удобнее в каждом случае.

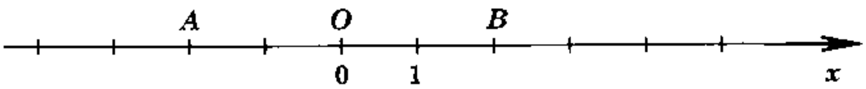


Рис. 7

Начальная точка O делит координатную ось на два луча. Один из них, идущий от точки O в положительном направлении, называется **положительным**, другой — **отрицательным**.

Каждой точке координатной оси поставим в соответствие действительное число x по следующему правилу.

Начальной точке O поставим в соответствие число нуль ($x=0$); точке A, если она находится на положительном луче, поставим в соответствие число x, равное длине отрезка OA ($x=OA$); точке A, если она находится на отрицательном луче, поставим в соответствие отрицательное число x, равное длине отрезка OA, взятой со знаком «—» ($x=-OA$).

Определенную таким образом координатную ось называют **координатной осью** x или коротко — **осью** x. Пишут также: ось Ox.

Число x, согласно указанному правилу, соответствующее произвольной точке оси x, называют **координатой** этой **точки**.

Впрочем, в этих названиях буква x может быть заменена любой другой буквой, например буквами y, z, t, ..., и тогда говорят об оси y, оси z, оси t и т. д.

Согласно указанному правилу:

1. **Каждой точке оси x соответствует действительное число — координата этой точки;**

2. **Две различные точки A и B оси x имеют разные координаты x_1 и x_2;**

3. **Каждое действительное число есть координата некоторой точки оси x.**

Иначе говоря, установлено взаимнооднозначное соответствие между точками оси Ox и действительными числами.

Точку O называют еще **началом координатной оси x.**

Положительный луч называют **положительной координатной полуосью**, а отрицательный луч называют **отрицательной координатной полуосью.**

Для краткости точку, имеющую координату x, называют точкой x.

Например, на рисунке 7 точку A называют точкой (-2), а точку B — точкой 2.

З а м е ч а н и е. В младших классах вводилось понятие координатной оси. Но там рассматривались только рациональные точки координатной оси, т. е. точки, имеющие рациональные координаты x, и прямая была «дырявая» — без иррациональных точек. Однако координата x произвольной точки координатной оси есть, вообще говоря, действительное число, т. е. оно может быть как рациональным, так и иррациональным. Этот вопрос и был выяснен выше на основании общего понятия длины отрезка, введенного в предыдущем пункте. Теперь координатная ось перестала быть «дырявой» — каждой ее точке соответствует действительное число.

169. Начертите в тетради координатную ось с единичным отрезком в 2 клетки. Укажите на этой оси числа:
а) 2; 3; 4; 5; б) -1; -2; -3; -4;
в) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{6}{2}$; $\frac{7}{2}$;
г) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{2}$; $-\frac{3}{2}$; $-\frac{4}{2}$; $-\frac{5}{2}$; $-\frac{6}{2}$; $-\frac{7}{2}$.

170. Начертите в тетради координатную ось с единичным отрезком в 10 клеток. Укажите на этой оси числа:
а) 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9;
б) $-0{,}1$; $-0{,}2$; $-0{,}3$; $-0{,}4$; $-0{,}5$; $-0{,}6$; $-0{,}7$; $-0{,}8$; $-0{,}9$.

171. Начертите координатную ось и укажите на ней данные числа, выбрав удобный единичный отрезок и положение начала координатной оси:

а) $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{6}$; $\frac{2}{3}$; $1\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{6}$;

б) $-1{,}2$; $-\frac{3}{5}$; $-1\frac{1}{5}$; $-0{,}5$; $-1{,}1$; $-\frac{4}{5}$;

в) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $0{,}75$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{12}$;

г) $-1\frac{2}{3}$; $-2{,}25$; $-1\frac{3}{4}$; $-1{,}75$; $-1\frac{5}{12}$; $-1\frac{5}{6}$.

172. Укажите на координатной оси числа:

а) 1026; 1027; 1029;
б) -784; -786; -790;
в) 300; 400; 600;
г) -100; -200; -250;
д) -1000; -2000; -4000;
е) $-0{,}24$; $-0{,}28$; $-0{,}22$.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

1. Делимость чисел

Признаки делимости. В 5—6 классах уже изучались некоторые признаки делимости натуральных чисел. Справедливость этих признаков доказывалась на конкретных примерах. Теперь признаки делимости натуральных чисел можно доказать в общем виде.

Сначала докажем утверждение, которое понадобится далее.

Теорема 1. *Если каждое из натуральных чисел a и b делится на натуральное число c, то их сумма и разность делятся на c.*

Доказательство. Так как каждое из натуральных чисел a и b делится на натуральное число c, то существуют натуральные числа m и n, такие, что $a=cm$ и $b=cn$. Но тогда сумму и разность чисел a и b можно записать так:

$$a+b=cm+cn=c(m+n),$$
$$a-b=cm-cn=c(m-n).$$

Это означает, что сумма и разность натуральных чисел a и b делятся на натуральное число c.

Напомним, что каждое многозначное число можно записать в виде суммы разрядных слагаемых:

$a=\overline{a_1a_0}=10a_1+a_0$ $(a_1\neq 0)$ — для двузначного числа,

$a=\overline{a_2a_1a_0}=10^2a_2+10a_1+a_0$ $(a_2\neq 0)$ — для трехзначного числа,

$a=\overline{a_3a_2a_1a_0}=10^3a_3+10^2a_2+10a_1+a_0$ $(a_3\neq 0)$ — для четырехзначного,

. . . .

$$a=\overline{a_n\ldots a_1a_0}=10^na_n+\ldots+10a_1+a_0\ (a_n\neq 0), \qquad (1)$$

где каждая из цифр $a_0, a_1, a_2, \ldots$ может быть равна одной из десяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, но цифра старшего разряда a_n не может быть нулем. Запись $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ есть условная запись правой части равенства (1).

Признаки делимости натуральных чисел можно доказать, пользуясь разложением натурального числа на разрядные слагаемые и теоремой 1. Докажем признак делимости на 9.

Теорема 2. *Если сумма цифр $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ числа $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ делится на 9, то и само число делится на 9.*

Доказательство. Для определенности докажем этот признак делимости для $n=6$, т. е. для семизначного числа:

$$a = \overline{a_6 \ldots a_2 a_1 a_0} = 10^6 a_6 + \ldots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0.$$

Отметим, что приведенное ниже доказательство сохраняет силу при любом другом количестве цифр числа a.

Прежде всего заметим, что $10 = 9 + 1$, $10^2 = 99 + 1$, $10^3 = 999 + 1$, ..., $10^6 = 999999 + 1$, поэтому число a можно записать так:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + (9+1) a_1 + (99+1) a_2 + (999+1) a_3 + (9999+1) a_4 + \\ &+ (99999+1) a_5 + (999999+1) a_6 = \\ &= (9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + 9999a_4 + 99999a_5 + 999999a_6) + \\ &+ (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6). \end{aligned} \qquad (2)$$

Так как каждое слагаемое суммы в первых скобках делится на 9, то по теореме 1 и вся сумма делится на 9. Если сумма во вторых скобках делится на 9, то по теореме 1 и вся сумма, т. е. число a, делится на 9. А это и требовалось доказать.

Верно и обратное утверждение: *если число $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ делится на 9, то и сумма его цифр $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ делится на 9.*

Это утверждение также докажем для $n=6$.

Из равенства (2) следует равенство

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = a - (9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + \\ & + 9999a_4 + 99999a_5 + 999999a_6). \end{aligned}$$

Так как число a и сумма в скобках делятся на 9, то на основании теоремы 1 и их разность, т. е. число $(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)$, делится на 9, что и требовалось доказать.

Алгоритм Евклида. Рассмотрим способ нахождения наибольшего общего делителя (НОД) натуральных чисел a и b.

Пусть даны натуральные числа a и b, $a \geqslant b$. Если a делится на b, т. е. $a = nb$, то НОД $(a, b) = b$.

Если же a не делится нацело на b, то разделим a на b с остатком:

$$a = n_1 b + r_1, \qquad (1)$$

где n_1 и r_1 — натуральные числа и $0 < r_1 < b$.

Теперь разделим с остатком b на r_1:

$$b = n_2 r_1 + r_2,$$

где n_2 — натуральное число, а r_2 — целое число, такое, что $0 \leqslant r_2 < r_1$.

Если $r_2 = 0$, то $b = n_2 r_1$ и число r_1 является делителем числа b, а в силу равенства (1) и делителем числа a. Значит, число r_1 — общий делитель чисел a и b. Так как любой общий делитель чисел a и b является в силу равенства (1) делителем числа r_1, то НОД $(a, b) = r_1$.

Если $r_2 > 0$, то разделим с остатком r_1 на r_2 и продолжим этот процесс, пока на k-м шаге не получится система равенств

$$\begin{cases} a = n_1 b + r_1, \\ b = n_2 r_1 + r_2, \\ r_1 = n_3 r_2 + r_3, \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ r_{k-3} = n_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1}, \\ r_{k-2} = n_k r_{k-1}, \end{cases} \tag{2}$$

т. е. пока не получится остаток $r_k = 0$. Это обязательно случится, потому что $r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}$ — натуральные числа и $r_1 > r_2 > \ldots > r_{k-1}$.

Просматривая цепочку равенств (2) снизу вверх, находим, что r_{k-1} есть общий делитель чисел a и b. Больше того, если просматривать цепочку равенств (2) сверху вниз, то окажется, что любой общий делитель a и b является делителем числа r_{k-1}, т. е. НОД $(a, b) = r_{k-1}$.

Проведенный процесс и называется алгоритмом Евклида.

Если окажется, что $r_{k-1} = 1$, т. е. НОД $(a, b) = 1$, то числа a и b не будут иметь общего простого делителя. В этом случае говорят, что числа a и b взаимно простые.

Итак, НОД (a, b) равен последнему, отличному от нуля остатку в алгоритме Евклида.

Рассмотрим применение алгоритма Евклида для натуральных чисел на примерах.

Пример 1. Вычислим НОД (133, 56).

Применим алгоритм Евклида:

$133 = 56 \cdot 2 + 21,$

$56 = 21 \cdot 2 + 14,$

$21 = 14 \cdot 1 + 7,$

$14 = 7 \cdot 2.$

НОД $(133, 56) = 7.$

Справа показана запись последовательного деления

$$\begin{array}{r|l} 133 & 56 \\ \underline{112} & 2 \\ 56 & 21 \\ \underline{42} & 2 \\ 21 & 14 \\ \underline{14} & 1 \\ 14 & 7 \\ \underline{14} & 2 \\ 0 & \end{array}$$

Пример 2. Вычислим НОД (83, 90).

Применим алгоритм Евклида:

$90=83\cdot1+7$,
$83=7\cdot11+6$,
$7=6\cdot1+1$,
$6=1\cdot6$.
НОД $(83, 90)=1$.

```
            90 |83
            83  1
         83 |7
          7  11
         13
          7
       7 |6
       6  1
    6 |1
    6  1
    0
```

Следовательно, НОД $(83, 90)=1$, т. е. числа 83 и 90 взаимно простые.

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Для нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел можно воспользоваться основной теоремой арифметики, т. е. разложить эти числа на простые множители и вычислить произведение всех их общих простых делителей.

Пример 1. Вычислим НОД (90, 84).

Так как $90=2\cdot3^2\cdot5$, $84=2^2\cdot3\cdot7$, то НОД $(90, 84)=2\cdot3=6$.

Мы рассмотрели и другой способ нахождения наибольшего общего делителя — с помощью алгоритма Евклида. Этот второй способ не требует предварительного разложения чисел на множители, а это очень важно, так как для больших чисел разложение на множители является весьма трудной задачей.

Для нахождения наименьшего общего кратного НОК двух натуральных чисел также можно воспользоваться основной теоремой арифметики.

Пример 2. Вычислим НОК (90, 84).

Так как $90=2\cdot3^2\cdot5$, $84=2^2\cdot3\cdot7$, то НОК $(90, 84)=2^2\cdot3^2\cdot5\times$ $\times7=1260$.

Для нахождения НОК двух натуральных чисел можно воспользоваться следующим равенством:

$$\text{НОК }(a, b)\cdot\text{НОД }(a, b)=a\cdot b.$$

Докажем сначала это равенство. Пусть НОД $(a, b)=d$, тогда $a=m\cdot d$, $b=n\cdot d$, где m и n — взаимно простые числа. Тогда НОК $(a, b)=m\cdot n\cdot d$ и

$$\text{НОК }(a, b)\cdot\text{НОД }(a, b)=(m\cdot n\cdot d)\cdot d=(m\cdot d)\cdot(n\cdot d)=a\cdot b,$$

что и требовалось доказать.

Вычислим НОК (90, 84), разделив произведение чисел 90 и 84 на их наибольший общий делитель 6:

$$\text{НОК }(90, 84)=90\cdot84:6=1260.$$

Пример 3. Вычислим НОК (83, 90).

Как было показано выше, НОД (83, 90) = 1, тогда НОК (83, 90) = $83 \cdot 90 : 1 = 7470$.

Деление с остатком целых чисел. Разделить с остатком целое число a на отличное от нуля целое число b — значит найти такие целые числа q и r, что

$$a = b \cdot q + r \qquad (1)$$

и

$$0 \leqslant r < |b|. \qquad (2)$$

Число q называют частным (или неполным частным), число r — остатком. Таким образом, в этом определении подразумевается, что остаток r — число неотрицательное.

Если $r = 0$, то говорят, что a делится на b нацело.

При $a = 0$ условиям (1) и (2) удовлетворяют $q = r = 0$. Поэтому дальше будем считать, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Для натуральных чисел a и b данное определение ничем не отличается от определения деления с остатком натуральных чисел, которое было дано в 5 классе. Если же a или b (или и a, и b) отрицательны, то найти q и r, удовлетворяющие условиям (1) и (2), можно, используя деление с остатком натуральных чисел. Покажем, как это делается, на примерах.

Пример 1. Разделим с остатком (-23) на 5.

Сначала разделим с остатком модуль числа (-23) на модуль числа 5:

$$23 = 5 \cdot 4 + 3.$$

Отсюда следует, что

$$-23 = 5 \cdot (-4) - 3. \qquad (3)$$

Так как остаток в равенстве (3) должен удовлетворять неравенствам

$$0 \leqslant r < 5,$$

то перепишем равенство (3) следующим образом:

$-23 = 5 \cdot (-4) - 3 = 5 \cdot (-4) - 5 + 2 = 5 \cdot (-4) + 5 \cdot (-1) + 2 =$
$= 5 \cdot (-5) + 2.$

Следовательно,

$$-23 = 5 \cdot (-5) + 2,$$

т. е. неполное частное есть (-5), а остаток есть 2.

Пример 2. Разделим с остатком 41 на (-7).

Так как $41 = 7 \cdot 5 + 6$, то

$$41 = (-7) \cdot (-5) + 6,$$

т. е. $q = -5$, $r = 6$.

Пример 3. Разделим с остатком (-189) на (-3).

Так как $189=3\cdot63$, то

$$-189=(-3)\cdot63,$$

т. е. $q=63$, $r=0$.

Деление с остатком целых чисел применяется для решения многих задач.

З а д а ч а. Найти все целые числа, которые при делении на 3 дают остаток 2, а при делении на 2 дают остаток 1.

Р е ш е н и е. Все целые числа, которые при делении на 3 дают остаток 2, можно записать в виде $a=3m+2$, где m — любое целое число. Из чисел вида $a=3m+2$ выберем те, которые при делении на 2 дают остаток 1. Ясно, что это будут числа a, соответствующие нечетным m, т. е. $m=2n+1$, где n — любое целое число.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют лишь числа вида $a=3(2n+1)+2=6n+5$, где n — любое целое число.

О т в е т: $6n+5$, где n — любое целое число.

З а м е ч а н и е. Иногда оказывается удобным вместо $a=6n+5$, где n — любое целое число, писать $a=6l-1$, где l — любое целое число, но следует иметь в виду, что -1 не является остатком при делении целого числа a на 6, так как остаток r при делении любого целого числа на 6 должен удовлетворять неравенствам $0\leqslant r<6$.

173. Докажите признак делимости[1]:

а) число $a=\overline{a_n...a_2a_1a_0}$ делится на 2, если число a_0 делится на 2;

б) число $a=\overline{a_n...a_2a_1a_0}$ делится на 5, если число a_0 делится на 5;

в) число $a=\overline{a_n...a_2a_1a_0}$ делится на 10, если число $a_0=0$;

г) число $a=\overline{a_n...a_2a_1a_0}$ делится на 4, если число $\overline{a_1a_0}$ делится на 4;

д) число $a=\overline{a_n...a_2a_1a_0}$ делится на 25, если число $\overline{a_1a_0}$ делится на 25;

е) число $a=\overline{a_n...a_2a_1a_0}$ делится на 3, если сумма его цифр $a_0+a_1+...+a_n$ делится на 3.

174*. Докажите признак делимости: число $a=\overline{a_5...a_1a_0}$ делится на 11, если сумма $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$ делится на 11.

175*. Придумайте и докажите признак делимости:
а) на 125; б) на 8.

176. Докажите обратное утверждение для каждого признака делимости.

---

[1] Для определенности для $n=5$ или $n=6$.

177. Вычислите НОД и НОК чисел:

а) 231 и 217;	б) 639 и 221;
в) 237 и 215;	г) 242 и 642;
д) 679 и 485;	е) 1998 и 111;
ж) 999 и 666;	з) 1999 и 2000;
и) 25 и 27.	

178. Докажите, что произведение:
а) двух последовательных целых чисел делится на 2;
б) трех последовательных целых чисел делится на 6;
в) четырех последовательных целых чисел делится на 24.

179. Найдите все целые числа, которые при делении на 4, на 3, на 2 дают в остатке 1.

180. Найдите все целые числа, которые при делении на 4 дают в остатке 3, при делении на 3 дают в остатке 2, при делении на 2 дают в остатке 1.

2. Исторические сведения

Задолго до нашей эры потребности счета привели человека к понятию натурального числа. Постепенно математики Вавилона, Египта, Китая, Греции еще до новой эры заложили основы науки — теории чисел, изучающей свойства натуральных чисел, в частности вопросы распределения простых чисел среди натуральных.

В России и в Советском Союзе крупнейшими представителями теории чисел были Л. Эйлер, П. Л. Чебышев и И. М. Виноградов.

Большой вклад в теорию чисел внес величайший математик Леонард Эйлер (1707—1783). Современники считали Л. Эйлера общим учителем математиков второй половины XVIII века, но он был также выдающимся механиком и физиком. По происхождению Эйлер был швейцарцем, однако более 30 лет он прожил в России, где его избрали академиком — членом Петербургской

Л. Эйлер

П. Л. Чебышев

И. М. Виноградов

Академии наук. Свои основные научные работы Эйлер написал в Петербурге. Он так описывает роль России в своем творчестве: «Его королевское величество (Фридрих II) недавно меня спрашивал, где я изучил то, что знаю? Я, согласно истине, ответил, что всем обязан моему пребыванию в Петербургской Академии наук».

Л. Эйлер написал учебник «Полное введение в алгебру», по образцу которого в дальнейшем писались другие учебники алгебры.

В прошлом веке многие задачи теории чисел были решены великим русским ученым академиком Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821—1894). Он внес большой вклад и в другие направления математики, а также механики, в теорию вероятностей, теорию механизмов, теорию функций и т. д.

В XX веке крупнейшим представителем теории чисел был советский математик академик Иван Матвеевич Виноградов (1891—1983), директор математического Института Академии наук СССР.

Приведем примеры отдельных решенных и нерешенных проблем в теории чисел.

П. Л. Чебышев показал, что *среди натуральных чисел от* n *до* $2n$ $(n>1)$ *имеется хотя бы одно простое число.*

И. М. Виноградов доказал для достаточно больших чисел проблему Гольдбаха, остававшуюся нерешенной 200 лет: *любое нечетное число, большее 5, есть сумма трех простых чисел.* Однако для всех нечетных чисел проблема Гольдбаха до сих пор не решена.

До сих пор не подтверждено также высказывание Эйлера (проблема Эйлера): *каждое четное число, большее 4, можно представить как сумму двух простых чисел.*

Математиков давно уже занимает следующий вопрос. Пусть N — натуральное число, а $a(N)$ — количество простых чисел, не превышающих N. Надо возможно точнее оценить число $a(N)$. Существенный вклад в решение этого вопроса внес П. Л. Чебышев.

В связи с необходимостью измерять различные величины — длины, площади, объемы, массы и др., наряду с натуральными числами возникли дробные или положительные рациональные числа. Дробные числа использовались математиками еще до новой эры. Результаты практических измерений обыкновенно даются рациональными числами, выражающими приближенно измеряемую величину. При этом широко употребляют конечные десятичные дроби.

По-видимому, впервые десятичные дроби появились в Китае и связано это с десятичной системой мер, которая существовала в Китае еще во II веке до н. э.

В 1427 году самаркандский математик и астроном Джемшид ибн Масуд аль-Каши подробно описал систему десятичных дробей и действий над ними. В Европе десятичные дроби стали известны через 100 с лишним лет после этого, благодаря, главным образом, трудам нидерландского инженера и ученого С. Стевина.

В русской литературе учение о десятичных дробях было впервые изложено в «Арифметике» Леонтия Филипповича Магницкого (1669—1739) — первом русском печатном учебнике по математике (1703 г.).

Десятичные дроби, благодаря простой записи и сходными с натуральными числами правилами действий, получили широкое распространение в практических расчетах.

Древние греки за несколько столетий до новой эры обнаружили, что наряду с рациональными отрезками, т. е. отрезками, имеющими длины, выражаемые рациональными числами, имеются также нерациональные отрезки, длины которых выражаются рациональными числами только приближенно. Для точного выражения требуется введение новых чисел. Греки, например, умели доказывать, что *диагональ квадрата со стороной длины 1 не выражается рациональным числом.*

Ход их рассуждений был примерно таков.

Предположим противное, что длина диагонали есть рациональное число $\frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Так как площадь квадрата $ACMN$, построенного на диагонали AC квадрата $ABCD$, равна двум площадям квадрата $ABCD$, то $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$, т. е. $\frac{p\cdot p}{q\cdot q}=2$.

Так как левая часть этого равенства есть несократимая дробь, а правая — натуральное число, то это равенство невозможно. Следовательно, наше предположение неверно, и поэтому длина диагонали не выражается рациональным числом. Она выражается иррациональным числом.

Таким образом, при решении математических задач стали появляться иррациональные (нерациональные) числа. Такими, например, являются числа, квадраты которых равны 2, 3, 17. Примеры таких чисел знал, а может быть, и впервые их открыл Пифагор — знаменитый греческий математик VI века до н. э.

Важную роль в математике играет число, равное отношению длины окружности к ее диаметру. Обозначение этого числа греческой буквой π («пи»)[1] получило в XVIII в. широкое распространение после работ Л. Эйлера. Ученые вычисляли приближенно значение π с разной точностью. Так, великий греческий математик и механик Архимед (III в. до н. э.) доказал неравенства

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}.$$

---

[1] От греческого слова *окружность*, начинающегося с буквы π.

Д. аль-Каши выразил приближенное значение π шестидесятиричной дробью

$$\pi \approx 3°8'29''44''' \quad \left(3+\frac{8}{60}+\frac{29}{60^2}+\frac{44}{60^3}\right).$$

Но только в XVIII веке было доказано, что число π иррациональное.

В математике долго стояла проблема об общем определении чисел, которые выражали бы длины произвольных отрезков. Эта проблема до конца была решена только в прошлом столетии. Выяснилось, что, например, в качестве таких чисел можно взять десятичные дроби. Длина произвольного отрезка выражается десятичной дробью, вообще говоря, бесконечной. Верно и обратное утверждение: любая десятичная дробь (в том числе бесконечная) есть длина некоторого отрезка.

Длина отрезка тесно связана с понятием координатной оси.

Еще во II—I вв. до н. э. китайские ученые использовали отрицательные числа для обозначения противоположных состояний: наличие — отсутствие, имущество — долг, приход — расход и т. д.

Отрицательные числа использовали и индийские математики в VII веке н. э.

В Европе первым к понятию отрицательного числа пришел итальянский математик Леонардо Пизанский (Фибоначчи) в XIII веке н. э. Когда при решении уравнений у него получались отрицательные ответы, он объяснял их как долг.

Но много веков отрицательные числа считались чем-то надуманным и мало применялись в математике. Широкое распространение они получили после того, как была понята важность введения в математику координатной оси. Ведь координатная ось имеет два направления, поэтому все ее точки нельзя представить только положительными числами — нужны и отрицательные.

Каждая точка координатной оси имеет координату — действительное число (оно может быть, с одной стороны, рациональным или иррациональным, с другой стороны — положительным, нулем или отрицательным), каждое действительное число есть координата некоторой точки координатной оси.

3. Задания для повторения

181. Определите, какой закономерности подчиняются последовательности чисел, и напишите следующее число для каждой из них:

а) 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; б) 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14;
в) 5; 10; 15; 20; 25; 30; г) 1; 4; 7; 10; 13; 16; 19;
д) 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; е) 40; 38; 36; 34; ...;
ж) 70; 64; 58; 52; ...; з) 2; 3; 6; 7; 10; 11; ...;
и) 10; 11; 15; 16; 20; 21; ... .

182. Выполните деление:

а) $37\,600:4$; б) $9840:60$; в) $864\cdot 800:800$;
г) $3276:21$; д) $28\,728:63$; е) $50\,904:72$;
ж) $10\,489:17$; з) $51\,414:66$; и) $598\,424:76$;
к) $18\,952:412$; л) $51\,211:617$; м) $41\,702:719$.

183. Определите порядок действий, найдите значение выражения:

а) $672:42+21\cdot 39$;
б) $989:43-912:48$;
в) $(720-695)\cdot(975:25)$;
г) $(109+839):(312-233)$;
д) $65\,254:79-75\,563:97$;
е) $37\,115:65+72\,675:85$;
ж) $407\cdot 720-350\cdot 509-43\,272:72$;
з) $564\cdot 702-164\cdot 756+148\cdot 916-48\,762:86$;
и) $8694:(4096-(1458+2316))$;
к) $18\,072:(6013-23\cdot 65)$.

184. Вычислите наиболее простым способом:

а) $756-79+79$; б) $213+395+187$;
в) $25\cdot 178\cdot 4$; г) $8\cdot 53\cdot 125$.

185. Вычислите:

а) $68\cdot 48+68\cdot 52$; б) $59\cdot 37+59\cdot 63$;
в) $87\cdot 29+87\cdot 71$; г) $17\cdot 73-63\cdot 17$;
д) $382\cdot 400-500\cdot 382$; е) $756\cdot 350+756\cdot 650$;
ж) $352\cdot 18:9$; з) $748\cdot 36:18$;
и) $126\cdot 96:32$; к) $172\cdot 256:128$.

186. Представьте числовое выражение в виде произведения возможно большего числа множителей, отличных от 1:
а) $40\cdot 24$; б) $12\cdot 25$; в) $164\cdot 125$; г) $112\cdot 147$.

187. Определите, являются ли данные числа простыми или составными:

а) 89, 123, 279; б) 335, 642, 601.

188. Определите порядок действий, прочитайте данное выражение, найдите его значение:

а) $(2^3)^2$; б) $(2^2)^3$; в) $(3^2-2^3)^5$; г) $(3^3-2^2)^2$;

189. Запишите в виде степени числа 10:

а) 10; б) 100; в) 1000; г) 1 000 000;
д) 1 000 000 000 000;
е) число, записанное единицей с тридцатью нулями.

190. Данные числа запишите в виде произведения степеней простых чисел:

а) 64, 128, 200; б) 144, 256, 333;
в) 346, 125, 512; г) 1728, 10 000, 4096;
д) 250 000, 75 000 000, 120 000 000.

191. а) Какой цифрой не может оканчиваться квадрат натурального числа?
б) В каких случаях квадрат натурального числа является четным числом?
в) Какими цифрами оканчиваются кубы последовательных натуральных чисел? В какой последовательности повторяются эти цифры?

192. а) Расставьте знаки арифметических действий между цифрами от 1 до 9 так, чтобы в результате получилось выражение, значение которого равно 100. Цифры должны располагаться по порядку, переставлять их не разрешается. В качестве компонента действия можно использовать как отдельную цифру, так и несколько рядом стоящих.
б) В условие задания а) внесите ограничение — можно пользоваться только знаками сложения и вычитания.
в) Решите аналогичную задачу в случае, если цифры расположены «по убыванию»: от 9 до 1.

193. Числа 6, 18, 30, 42 представьте в виде суммы степеней числа 2.

194. Допишите к числу 378 справа такие три цифры, чтобы полученное шестизначное число делилось на 6, 7 и 9.

195. Назовите и укажите на координатной оси число, противоположное числу: 2; -5; 0; 1; -3.

196. Вычислите:

а) $3-2$;	б) $-3-2$;
в) $-6+5$;	г) $2-7$;
д) $5-2-3$;	е) $4+1-8$;
ж) $-2-2+5$;	з) $-4-1-5$;
и) $-4+5+2$;	к) $4+2-9-1$;
л) $2-5-6+1$;	м) $-3-5-4+7$;
н) $-1-1-6-4$;	о) $-2+6-4-5+7$.

197. Найдите число, если:
а) в 4 раза большее число равно 36;
б) в 2 раза меньшее число равно 8;
в) на 17 большее число равно 45;
г) на 15 меньшее число равно 46;
д) в 5 раз большее число равно 75;
е) на 9 меньшее число равно 4;
ж) на 18 большее число равно 67;
з) в 7 раз меньшее число равно 1.

198. Какое число следует:
а) вычесть из 20, чтобы получить 12;
б) увеличить на 15, чтобы получить 19;
в) уменьшить на 42, чтобы получить 32;

г) умножить на 4, чтобы получить 56;
д) разделить на 24, чтобы получить 2;
е) вычесть из 106, чтобы получить 87;
ж) увеличить в 6 раз, чтобы получить 96;
з) уменьшить в 4 раза, чтобы получить 7;
и) прибавить к 17, чтобы получить 76?

199. Найдите число, если оно:
а) увеличенное на 5, равно 12;
б) уменьшенное на 10, равно 40;
в) увеличенное в 2 раза, равно 16;
г) уменьшенное в 5 раз, равно 3;
д) увеличенное на 21, равно 13;
е) уменьшенное в 3 раза, равно 7;
ж) уменьшенное на 8, равно -9;
з) увеличенное в 8 раз, равно 5.

200. Запишите:
а) сумму числа 5 и числа, противоположного 4;
б) сумму числа, противоположного 5, и числа -4;
в) сумму числа, противоположного числу -2, и числа, противоположного 5;
г) разность чисел 2 и 7;
д) разность числа 6 и числа, противоположного -3;
е) произведение чисел -2 и 4;
ж) частное чисел 6 и -3;
з) произведение чисел -1 и -2.

201. Найдите значение выражения:
а) $|-2|+|-1|$; б) $|7|-|-11|$;
в) $|5-7|$; г) $7-|-5-67|$.

202. Докажите, что:
а) $\frac{171\,717}{252\,525}=\frac{1717}{2525}=\frac{17}{25}$;
б) $\frac{313\,131}{757\,575}=\frac{3131}{7575}=\frac{31}{75}$.

Вычислите **(203—209)**:

203. а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{7}+\frac{5}{7}$; в) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$;
г) $1\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$; д) $2\frac{7}{9}+\frac{4}{9}$; е) $3\frac{2}{5}+12\frac{4}{5}$.

204. а) $\frac{9}{11}-\frac{8}{11}$; б) $\frac{6}{7}-\frac{2}{7}$; в) $1-\frac{1}{9}$;
г) $12-\frac{1}{3}$; д) $127-\frac{2}{5}$; е) $193-\frac{4}{9}$;
ж) $13\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$; з) $13\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; и) $15\frac{4}{5}-8\frac{2}{5}$.

205. а) $20\frac{3}{8}-16\frac{1}{4}$; б) $3\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$; в) $2\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$;
г) $10\frac{1}{5}-\frac{2}{5}$; д) $\frac{3}{7}-\frac{4}{5}$; е) $3\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}$;
ж) $10\frac{1}{3}-8\frac{4}{5}$; з) $4\frac{3}{8}-1\frac{5}{6}$; и) $7\frac{5}{12}-4\frac{15}{16}$.

206. а) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{6}\cdot\frac{6}{7}$; в) $\frac{7}{8}\cdot\frac{24}{49}$;
г) $\frac{100}{121}\cdot\frac{55}{144}$; д) $\frac{3}{8}\cdot 2$; е) $\frac{4}{5}\cdot 6$;
ж) $3\cdot 1\frac{1}{8}$; з) $0\cdot\frac{1}{4}$; и) $4\cdot 2\frac{1}{12}$.

207. а) $4\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{14}$; б) $2\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{14}$; в) $\frac{2}{3}\cdot 1\frac{1}{8}$;
г) $5\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{34}$; д) $\frac{4}{7}\cdot 3\frac{1}{16}$; е) $1\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{3}$;
ж) $2\frac{1}{7}\cdot 1\frac{13}{15}$; з) $10\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{2}$; и) $7\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{15}$.

208. а) $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{5}:\frac{15}{18}$; в) $\frac{14}{15}:\frac{18}{25}$;
г) $\frac{3}{7}:\frac{63}{84}$; д) $\frac{2}{3}:2$; е) $\frac{6}{7}:3$;
ж) $10:\frac{5}{7}$; з) $\frac{9}{10}:13$; и) $1\frac{1}{3}:8$;
к) $10:2\frac{1}{2}$; л) $3\frac{2}{5}:34$; м) $18:7\frac{1}{5}$;
н) $1\frac{1}{2}:1\frac{1}{3}$; о) $2\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}$.

209. а) $\left(4\frac{2}{8}+5\frac{1}{2}\right)\cdot 6$; б) $\left(4-1\frac{1}{3}\cdot 2\right)\cdot\frac{1}{2}$;
в) $6\frac{3}{5}\cdot 7\frac{1}{6}-2\frac{1}{6}\cdot 6\frac{3}{5}$; г) $3\frac{3}{4}\cdot 3\frac{3}{4}+3\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}$.

210. Найдите несократимую дробь, которая от прибавления к числителю знаменателя (при этом знаменатель не изменяется) увеличится в 3 раза.

211. Прочитайте числа: 0,5; 1,24; 12,245; 0,0027.

212. Сравните числа:
а) 0,526471 и 0,524671;
б) 2,076812 и 2,076813;
в) 0,247459 и 0,347459;
г) 7,127586 и 7,1278.

Вычислите **(213—216)**:

213. а) $0{,}5+0{,}345$; б) $1{,}3+0{,}416$;
в) $4{,}2+1{,}304$; г) $12{,}4+0{,}012$;

д) $1{,}47-0{,}84$; е) $5{,}12-2{,}0904$;
ж) $6{,}45-0{,}079$; з) $15{,}2-2{,}0904$.

214. а) $8{,}5\cdot 10$; б) $0{,}68\cdot 10$; в) $0{,}9\cdot 100$;
г) $1{,}8\cdot 1000$; д) $0{,}7\cdot 4$; е) $76\cdot 1{,}75$;
ж) $49\cdot 0{,}3$; з) $0{,}87\cdot 5$; и) $0{,}15\cdot 400$.

215. а) $25\cdot 10$; б) $32{,}9\cdot 100$; в) $0{,}54\cdot 10$;
г) $1{,}4\cdot 1000$; д) $1{,}2\cdot 4$; е) $50{,}4\cdot 8$;
ж) $0{,}56\cdot 4$; з) $3{,}425\cdot 5$; и) $91{,}8\cdot 0{,}27$.

216. а) $3:\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)$; б) $1\frac{1}{5}-\frac{1}{5}:2$;
в) $(1-0{,}15):17$; г) $(1{,}6-0{,}7)\cdot 100$;
д) $4{,}5+0{,}5\cdot 7$; е) $1{,}6+1{,}4:0{,}2$;
ж) $3:\frac{1}{2}-0{,}4$; з) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right):0{,}5$.

217. Не выполняя вычислений, сравните значения числовых выражений:

а) $2\cdot 0{,}3$ и $2:0{,}3$; б) $10:\frac{1}{3}$ и $10\cdot\frac{1}{3}$;
в) $10\cdot(-2)$ и $10:(-2)$; г) $10-(-2)$ и $10+(-2)$.

Вычислите **(218—222)**:

218. а) $2{,}3+(4{,}5-27{,}5):2{,}3$; б) $(2{,}2-1{,}44\cdot 5):2{,}5$;
в) $(0{,}4-0{,}45+1{,}24)\cdot 5:3{,}5$; г) $(1230\cdot 0{,}01-4{,}8):2{,}5\cdot 1{,}6$.

219. а) $(2{,}5-5{,}2)\cdot 0{,}4$;
б) $(36{,}5\cdot 5{,}4+0{,}6):0{,}1$;
в) $(3{,}5\cdot 24{,}8+1{,}2):0{,}1$;
г) $3{,}6:\left(68{,}1:7{,}5-8\frac{17}{20}+2\frac{1}{50}\right)+4\frac{5}{6}\cdot\frac{33}{58}$.

220. а) $\frac{5}{12}:\left(\frac{1}{3}\cdot 2{,}5-\frac{7}{8}\right)-1{,}25$;
б) $\left(3\frac{5}{18}-7\frac{1}{12}+2\frac{2}{9}\right)\cdot(2{,}448:1{,}2)$;
в) $\left(\frac{5}{9}-1\frac{1}{6}\cdot 0{,}5\right):\frac{5}{9}-\frac{1}{3}$;
г) $\frac{1}{3}\cdot(0{,}216:0{,}2-0{,}12\cdot 10)$;
д) $\left(2{,}4\cdot 0{,}5-2:\frac{1}{2}\right):0{,}1$;
е) $(2{,}4\cdot 1{,}3-4{,}05:0{,}5):20$;
ж) $0{,}3-4{,}2:\left(2{,}25-1\frac{7}{8}\cdot 3\frac{1}{3}\right)$.

221. а) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{7}-\frac{4}{5}$; в) $-\frac{2}{8}+\frac{7}{9}$;
г) $-\frac{3}{8}-\frac{7}{12}$; д) $2-3\frac{1}{2}$; е) $4\frac{1}{3}-5$;

ж) $3\frac{1}{2}-7\frac{2}{3}$; з) $-8\frac{1}{4}-2\frac{1}{3}$; и) $5\frac{1}{7}-7\frac{5}{6}$;

к) $3{,}2-2\frac{1}{3}$; л) $7\frac{1}{5}-3{,}4$; м) $8{,}12-4\frac{7}{9}$;

н) $1{,}1-7\frac{3}{8}$; о) $4\frac{1}{3}-5{,}75$; п) $2\frac{1}{5}-8\frac{4}{7}$.

222. $\left(\frac{(11-9{,}5):0{,}003}{(4{,}05-3{,}65)\cdot 20}-\frac{0{,}45-0{,}225}{13{,}625:(2{,}6+0{,}125)}\right):62{,}455.$

223*. *Из сборника задач для гимназий XIX в.*

Вычислите:

а) $\frac{(6{,}25-3{,}75)\cdot 0{,}8}{(4-2{,}75):6{,}25}+\frac{(2{,}5+0{,}75):3{,}25}{(40-38{,}8)\cdot 5}$;

б) $\frac{(7{,}3+2{,}7)\cdot 0{,}1}{(3{,}5-1{,}5):0{,}5}-\frac{(4{,}45-2{,}2):0{,}3}{(0{,}823+0{,}177)\cdot 30}$;

в) $\left(\frac{0{,}3\cdot(1{,}5-0{,}7)}{0{,}5\cdot(0{,}47+0{,}53)}+\frac{(0{,}2-0{,}15):0{,}001}{(4{,}7-3{,}9)\cdot 10}\right):26{,}92$;

г) $26:\left(\frac{3:(0{,}2-0{,}1)}{2{,}5\cdot(0{,}8+1{,}2)}+\frac{(34{,}06-33{,}81)\cdot 4}{6{,}84:(28{,}57-25{,}15)}\right)$.

224*. *Из сборника задач для гимназий XIX в.*

а) Умножьте $\frac{\left(4{,}5+2\frac{3}{5}\right)\cdot(17-15{,}5)}{(3{,}6-0{,}63):(3{,}2+8{,}68)}+\frac{13{,}464}{0{,}36}$ на

$$0{,}1:\left(\frac{(1{,}09-0{,}29)\cdot 1\frac{1}{4}}{\left(18{,}9-16\frac{13}{20}\right)\cdot\frac{8}{9}}+\frac{(11{,}81+8{,}19)\cdot 0{,}02}{9:11{,}25}\right);$$

б) Сложите: $\frac{\left(8\frac{7}{55}-6{,}15454...\right)\cdot 1\frac{3}{217}}{(0{,}4-0{,}15):\frac{1}{4}}$ и $\frac{\left(3\frac{5}{8}+1{,}375\right):0{,}5}{2\frac{3}{4}:\left(3\frac{7}{20}-2{,}8\right)}$;

в) Разделите

$$7\frac{1}{2}+6{,}833+...+5,(6)+\frac{13\frac{3}{4}+12\frac{1}{2}}{0{,}5-0{,}0625}-\frac{\frac{2}{9}+3{,}611...}{1{,}9166...-\frac{5}{6}}-42\frac{6}{13}$$ на

частное от деления $\frac{(6-4{,}5):0{,}003}{(3{,}05-2{,}65)\cdot 20}-\frac{(0{,}3-0{,}15)\cdot 1\frac{1}{2}}{(1{,}88+2{,}12)\cdot 0{,}125}$ на 62,05.

Вычислите **(225—226)**:

225°. а) $25\cdot 7\cdot 8$; б) $13\cdot 12\cdot 25$;

в) $2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{7}\cdot 7-\frac{1}{6}\cdot 6$;

д) $78:3\cdot\left(\frac{1}{3}-2\frac{1}{4}\right)$; е) $\left(75-100\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot 0{,}04$.

226°. а) $12{,}5(67)-12{,}5(67)$; б) $6{,}7(89)\cdot 0$;
в) $4{,}51(2):1$; г) $0:0{,}0(654)$.

227. Докажите, что если:
а) $a<b$ и c - число отрицательное, то $ac>bc$;
б) $0<a<b$, то $a^2<b^2$;
в) $a<b<0$, то $a^2>b^2$.

228. Вычислите квадрат числа:
а) 0,1; 1,2; 0,02; б) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $1\frac{1}{3}$; 0.

229. Вычислите куб числа:
а) 0,1; 1,1; 0,002; б) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; $2\frac{1}{2}$.

Запишите **(230—231)**:

230. а) квадрат числа 1,5;
б) удвоенное число 0,3;
в) сумму чисел 2 и $\frac{1}{2}$;
г) произведение чисел 2,14 и $3\frac{1}{6}$;
д) сумму квадрата числа 5 и куба числа 0,1;
е) квадрат суммы чисел 0,4 и 7.

231. а) квадрат числа -2;
б) удвоенное число 0,4;
в) произведение чисел $-1{,}2$ и $-\frac{2}{7}$;
г) сумму чисел $-\frac{1}{2}$ и -5;
д) квадрат числа $-0{,}2$;
е) куб числа -5.

232. Вычислите:
а) $0{,}6^2$; $1{,}12^2$; $12{,}1^2$; $0{,}007^2$;
б) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(\frac{3}{5}\right)^2$; $\left(\frac{2}{7}\right)^2$; $\left(\frac{9}{11}\right)^2$;
в) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(1\frac{2}{3}\right)^2$; $\left(2\frac{1}{4}\right)^2$; $\left(5\frac{2}{3}\right)^2$.

Сравните значения числовых выражений **(233—234)**:

233. а) 3^2 и 2^3; б) 2^5 и 5^2;
в) $0{,}5^2$ и $0{,}4^2$; г) $1{,}1^2$ и $2{,}1^2$;
д) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ и $\left(\frac{5}{4}\right)^2$; е) $\left(1\frac{1}{3}\right)^3$ и $2{,}4^2$;

ж) $0{,}5^2$ и $0{,}5^3$; з) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^3$;

и) $(-0{,}3)^2$ и $(-0{,}4)^2$; к) $(-2)^3$ и $(-3)^3$.

234. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ и $\left(\frac{3}{4}\right)^3$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ и $\left(\frac{1}{9}\right)^2$;

в) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ и $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$; г) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$ и $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$;

д) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{6}\right)^2$;

е) $\left(-\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$;

ж) $1\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(1\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^2\right)$ и 1;

з) $\frac{1}{2}\cdot\left(\left(2\frac{1}{3}\right)^2-31\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)-1$ и 1.

235. Запишите выражения в порядке возрастания их значений:

а) $(-0{,}5)^2$; $-16{,}1$ и 4; б) $(-5)^3$; 0,1 и $2{,}1^3$;

в) $8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$; $8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; $8:\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Вычислите **(236—237)**:

236. а) $(-2)^2$; $(-2)^3$; $(-2)^4$; $(-2)^5$; $(-2)^{10}$; 0^5;

б) -3^4; $(-7)^2$; 0^{10}; $(-1)^5$; -1^3;

в) $(-1)^{11}-(-1)^{11}$; г) $(-1)^4-(-1)^3-(-1)^2$;

д) $(-2)^5-(-3)^3$; е) $(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4$.

237. а) $3\cdot(-2)^2$; б) $-4\cdot(-3)^3$;

в) $-(-3)^4$; г) $-(-2)^3$;

д) $-(-0{,}3)^2$; е) $-(-0{,}5)^3$;

ж) $-\frac{1}{2}\cdot(-4)^2$; з) $-\frac{2}{3}\cdot(-3)^3$;

и) $(-5)^3\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$; к) $(-3^3)^2$;

л) $(-3^2)^3$; м) $(-1)^{1999}$;

н) $(-1)^k+(-1)^{k+1}$, где k — целое число.

238. Запишите данное числовое выражение в виде квадрата некоторого числа:

а) $32\cdot2$; б) $8\cdot2$; в) $4^2\cdot4$; г) $3^4\cdot4^2$.

239. Запишите:

а) 10^2 в виде произведения двух квадратов;

б) 12^3 в виде произведения двух кубов;

в) 3^{12} в виде квадрата;

г) 3^{12} в виде куба;

д) 7^4 в виде квадрата;

е) 4^5 в виде произведения квадрата и куба;

ж) 6^7 в виде произведения квадрата и куба.

240. Сравните значения числовых выражений:

а) $5^{10} \cdot 5^{10}$ и $(3 \cdot 5)^{10}$; б) 8^{40} и 72^{20};
в) 21^4 и 28^3; г) 63^{30} и 9^{60};
д) 9^4 и 27^3; е) 8^9 и 4^{14};
ж) 25^6 и 125^3; з) 8^4 и 16^3.

241. Вычислите:

а) $25^4 \cdot 4^5$; б) $5^6 \cdot 2^7$.

242. Почему при возведении в квадрат несократимой дроби (со знаменателем, отличным от 1) не может получиться целое число?

243. Почему при возведении в квадрат несократимой дроби не может получиться сократимая дробь?

244. В каких случаях при возведении положительного числа в степень k ($k>1$) получается число, большее данного, а в каких случаях получается число, меньшее данного?

245*. Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении:

а) на 2 остаток 1; б) на 3 остаток 2;
в) на 4 — остаток 3; г) на 5 остаток 4;
д) на 6 — остаток 5; е) на 7 остаток 6;
ж) на 8 — остаток 7; з) на 9 остаток 8;
и) на 10 — остаток 9.

246. Следующие действительные числа расположите в порядке возрастания: $1\frac{1}{9}$; $-0{,}21212121...$; $1{,}112$; $-0,(2)$; $1\frac{1}{11}$; $1,(1)$; $-0,(21)$; $-0{,}2$.

247*. а) Каково наибольшее действительное число, меньшее 0,9, в десятичную запись которого не входит цифра 9?
б) Существует ли наименьшее число, большее 1?
в) Каково наименьшее действительное число, большее 3,6, в бесконечную десятичную запись которого не входят цифры 0; 1; 2?

248. а) Укажите обыкновенную дробь со знаменателем 7, большую 0,5, но меньшую 0,6.
б) Укажите все обыкновенные дроби со знаменателем 13, большие 0,4, но меньшие 0,6. Сколько таких дробей?

249. Укажите на координатной оси с единичным отрезком длиной 10 см числа:

а) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{10}$; $1\frac{1}{4}$;

б) 1; 0,5; 0,1; 0,9; 0,35.

250. Укажите на координатной оси числа:

а) 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{8}$;

б) $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{3}{20}$; $\frac{1}{40}$;

в) 0,1; 0,4; 0,9; 1,2; 0,35; 1,25; 0,95;

г) -1; $-0,1$; $-0,5$; $-0,8$; $-1,2$; $-0,75$;

д) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{1}{16}$;

е) $-\frac{1}{4}$; $-1\frac{1}{4}$; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{8}$; $-\frac{3}{8}$; $-1\frac{1}{16}$.

251. Выбрав единичный отрезок, укажите на координатной оси числа:

а) -3758 и -3760; б) 2,125 и 2,127.

Укажите на этой же координатной оси какое-либо число, большее одного из указанных чисел и меньшее другого.

252. Изобразите координатную ось вертикально с положительной полуосью, направленной вверх. Укажите на ней числа:

а) 1; 2; 3; 4; б) 0,5; 0,7; 1,2; 1,3;

в) -1; -2; -3; -4; г) $-0,3$; $-0,5$; $-0,9$; $-1,2$.

253. В декартовой системе координат xOy:

а) отметьте три точки, имеющие абсциссу 2, определите их ординаты и запишите координаты этих точек;

б) отметьте три точки, имеющие ординату -3, определите их абсциссы и запишите координаты этих точек;

в) отметьте три точки, имеющие абсциссу 0, определите их ординаты и запишите координаты этих точек;

г) отметьте три точки, имеющие ординату 0, определите их абсциссы и запишите координаты этих точек.

254. Постройте на координатной плоскости точки:

а) $A(1;\ 3)$, $B(1;\ 5)$, $C(1;\ -2)$, $D(1;\ 0)$;

б) $A(-2;\ 2)$, $B(-2;\ -2)$, $C(-3;\ -1)$, $D(-1;\ -3)$;

в) $A(0,5;\ -2)$, $B(0;\ 0,5)$, $C(-1,5;\ 0)$, $D(0;\ -2,5)$;

г) $A(-2,5;\ -0,5)$, $B(-1,5;\ 1,5)$, $C(1,5;\ -1,5)$, $D(2,5;\ 0,5)$.

255. а) Постройте замкнутую ломаную $ABCDMNK$, если $A(-2;\ 2)$, $B(-2,5;\ 2)$, $C(-0,5;\ 3)$, $D(1,5;\ 2)$, $M(1;\ 2)$, $N(1;\ -0,5)$, $K(-2;\ 0,5)$.

б) Постройте ломаную $ABCDEFKND$, если $A(-2,5;\ 1,5)$, $B(-4;\ 1,5)$, $C(-2,5;\ 4,5)$, $D(-2,5;\ 0,5)$, $E(-5,5;\ 0,5)$, $F(-4,5;\ -0,5)$, $K(-2;\ -0,5)$, $N(-1;\ 0,5)$, $D(-2,5;\ 0,5)$.

256. На координатной плоскости отметьте все точки:

а) абсциссы которых больше 1;

б) ординаты которых меньше -3;

в) абсциссы которых удовлетворяют неравенству $x \geqslant -2$;

г) ординаты которых удовлетворяют неравенству $y \geqslant 3$;

д) абсциссы которых удовлетворяют неравенству $-1 < x < 3$.

е) ординаты которых удовлетворяют неравенству $-5 < y < 1$.

257. Запишите координаты точек, изображенных:
а) на рисунке 8; б) на рисунке 9.

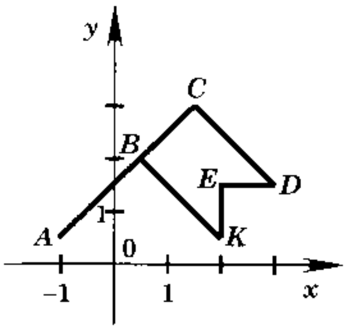


Рис. 8

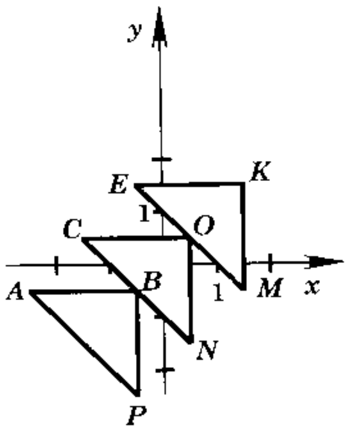


Рис. 9

258. Отметьте на координатной плоскости все точки:
а) абсциссы которых равны 2;
б) ординаты которых равны -4;
в) абсциссы которых равны 0;
г) ординаты которых равны 0;
д) абсциссы и ординаты которых равны.

259. Отметьте на координатной плоскости точки $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют условиям:
а) $x=3$, $y>2$; б) $x<-2$, $y=-4$;
в) $0<x<5$, $y>4$; г) $x<0$, $-2<y<4$;
д) $-1<x<3$, $0<y<5$;
е) $-3<x<1$, $-2<y<1$.

260. Изобразите на координатной оси с единичным отрезком длиной 15 см приближения числа $0,(5)$: 0,5; 0,55; 0,555; ...

261°. На одной чашке весов лежит пакет с конфетами и гиря в 100 г, а на другой чашке уравновешивающая их гиря в 0,5 кг. Какова масса пакета с конфетами?

262. Составьте числовое выражение для решения задачи:
а) Куплено 3 кг яблок по 5 р. за 1 кг и 2,5 кг груш, которые стоят дороже на 1 р. за 1 кг. Определите стоимость покупки.
б) Имеется 8 купюр по 10 р. и 3 купюры по 5 р. Купили 2 батона хлеба по 4 р. Сколько денег осталось?
в) В первой бригаде 12 рабочих, во второй в 3 раза больше, чем в первой, а в третьей на 22 рабочих меньше, чем в двух первых бригадах вместе. Сколько рабочих в третьей бригаде?

263. *Задачи аль-Хорезми (ок. 787—850).*
а) Найдите два числа, зная, что их сумма равна 10, а их отношение — 4.
б) Разность двух чисел равна двум, а их отношение — числу, обратному двум. Найдите эти числа.

264. а) Расстояние между селами 18 км. Путник прошел в 5 раз больше, чем осталось пройти. Сколько километров он уже прошел?
б) Некто подсчитал, что прошедшая часть суток в 2 раза меньше оставшейся. Сколько времени прошло с начала суток?
в) Некто подсчитал, что с начала года прошло в 4 раза больше дней, чем осталось до конца года. В каком месяце он вел подсчеты?

265. Брат и сестра коллекционируют открытки. У брата в 2 раза больше открыток, чем у сестры, а всего у них 60 открыток. Сколько открыток у каждого?

266. а) Два брата коллекционируют марки. У старшего брата в 3 раза больше марок, чем у младшего, а всего у них m марок. Сколько марок у каждого?
Составьте формулу для получения ответа и найдите его при $m=100$, 120, 160.
б) Два брата коллекционируют марки. У старшего брата в n раз больше марок, чем у младшего, а всего у них 150 марок. Сколько марок у каждого?
Составьте формулу для получения ответа и найдите его при $n=2$, 4, 5.

267. Две сестры коллекционируют открытки. У старшей сестры в n раз больше открыток, чем у младшей, а всего у них m открыток. Сколько открыток у каждой?
Составьте формулу для получения ответа и найдите его при:
а) $n=3$, $m=280$; б) $n=4$, $m=395$.

268. В магазин привезли m кг арбузов и дынь. Масса арбузов была в n раз больше массы дынь. Какова масса дынь?
а) Решите задачу для $m=600$, $n=3$.
б) Подберите другие такие значения m и n, чтобы ответ выражался натуральным числом.

269. а) Вася решил в 3 раза больше задач, чем Петя, а Петя решил на 12 задач меньше, чем Вася. Сколько задач решил каждый?
б) Вера выучила в n раз меньше стихотворений, чем Поля, а Поля выучила на 6 стихотворений больше, чем Вера. Сколько стихотворений выучила каждая?
Решите задачу для $n=3$, 4, 7.

270. а) Вова решил в n раз меньше задач, чем Толя, который решил на m задач больше, чем Вова. Сколько задач решил каждый?

Составьте формулу для решения задачи.

б) Подберите такие значения m и n, чтобы ответ в задаче пункта а) выражался целым числом.

271. а) На первой полке в 2 раза больше книг, чем на второй, но на 23 книги меньше, чем на двух полках вместе. Сколько книг на каждой полке?

б) В субботу магазин продал в 3 раза больше конфет, чем в пятницу, но на 50 кг меньше, чем за оба эти дня. Сколько килограммов конфет продано в каждый из этих дней?

272. а) Сумма двух чисел, одно из которых на 5 больше другого, равна 19. Найдите эти числа.

б) Сумма двух чисел, одно из которых на 5 меньше другого, равна 19. Найдите эти числа.

в) Сумма двух чисел, одно из которых в 5 раз больше другого, равна 19. Найдите эти числа.

г) Сумма двух чисел, одно из которых в 5 раз меньше другого, равна 19. Найдите эти числа.

273. За две книги заплатили 15 р. Определите стоимость каждой книги, если известно, что одна из них на 4 р. дешевле другой.

274. *Задача С. А. Рачинского.* Два мальчика играли в шашки. Через несколько минут на доске осталось пустых клеток втрое больше, чем занятых шашками, а у одного мальчика на 2 шашки больше, чем у другого. Сколько шашек осталось у каждого?

275. Скорость течения реки 2,5 км/ч. За сколько часов катер, имеющий собственную скорость 20 км/ч, проплывет расстояние между пристанями 12,6 км туда и обратно?

276. Скорость лодки по течению 12 км/ч, а против течения 9 км/ч. Какова скорость течения реки и собственная скорость лодки?

277. Расстояние, равное 42 км, лодка проплывает по течению за 1,4 ч, а против течения за 1,6 ч. Какова скорость течения реки и собственная скорость лодки?

278. Расстояние между пристанями, равное 42 км, теплоход проходит по течению за 1,2 ч, а против течения за 1,4 ч. За сколько часов это расстояние проплывут плоты?

279. Два пешехода вышли из двух пунктов одновременно навстречу друг другу со скоростями 4 км/ч и 5 км/ч. Через сколько часов они встретятся, если расстояние между пунктами равно S км?

Составьте формулу для решения задачи и найдите ответ, если:
а) $S=27$; б) $S=7{,}2$; в) $S=4{,}5$.

280. Два пешехода вышли из одного пункта одновременно в одном направлении со скоростями 4,5 км/ч и 6 км/ч. Какое расстояние будет между ними через t ч?
Составьте формулу для решения задачи и найдите ответ, если:
а) $t=2$; б) $t=3{,}2$; в) $t=2{,}4$.

281. Из города A выехала грузовая машина со скоростью 60 км/ч. Через t ч вслед за ней из того же города выехала легковая машина со скоростью 80 км/ч. Через сколько часов легковая машина догонит грузовую?
Составьте формулу для решения задачи и найдите ответ, если:
а) $t=2$; б) $t=2{,}5$; в) $t=3{,}4$.

282*. Из города A выехал автобус со скоростью 60 км/ч. Через t ч вслед за ним из города B выехала легковая машина со скоростью 80 км/ч. Через сколько часов легковая машина догонит автобус, если расстояние между городами равно S км?
Составьте формулу для решения задачи и найдите ответ, если:
а) $t=2$, $S=20$; б) $t=2{,}5$, $S=15$.

283. Дачник пришел от дачи на станцию за 13 мин до отхода поезда. Если бы он на каждый километр тратил на 3 мин больше, то пришел бы за 1 мин до его отправления. Далеко ли от станции живет дачник?

284. *Старинная задача.* Если предположить, что лошадь бежит втрое медленнее поезда железной дороги, то она будет от него отставать на одну версту каждые 3 мин. Определите скорость поезда. Выразите ответ в километрах в час с точностью до десятых. (1 верста $\approx 1{,}067$ км.)

285. От Москвы до Курска 537 км. Из Москвы в Курск вышел поезд со скоростью 60 км/ч. Через 6 ч, в 20 ч 55 мин, на промежуточной станции первый поезд встретился с поездом, вышедшим из Курска в Москву в 17 ч 55 мин. Определите, с какой скоростью двигался до встречи второй поезд?

286*. К приезду начальника на станцию обычно присылают машину. Приехал он однажды на час раньше, пошел пешком и, встретив посланную за ним машину, прибыл с ней на место на 10 мин раньше обычного срока. Во сколько раз скорость машины больше скорости начальника?

287. Разделите число a в отношении $2:3$, если:
а) $a=200$; б) $a=355$.

288. Разделите число 777 в отношении $m:n$.
Составьте формулы для решения задачи и найдите ответы, если:
а) $m=3$, $n=4$; б) $m=6$, $n=1$.

289. *Старинная задача.* Три швеи заработали в одном доме 21 р. 15 к., причем первая работала 4 дня по 10 ч ежедневно, вторая 5 дней по 9 ч и третья 7 дней по 8 ч. Сколько получит каждая из заработанной суммы сообразно времени, употребленному на работу?

290. а) Найдите $\frac{3}{4}$ от числа 324.

б) Найдите число, $\frac{3}{4}$ которого равны 324.

в) Какую часть числа 450 составляет число 180?

291. а) Найдите число, $\frac{2}{5}$ которого равны $\frac{3}{5}$ от 600.

б) Найдите число, 0,6 которого равны 0,1 от 120.

292. а) Найдите 0,13 числа 400.
б) Найдите число, 0,3 которого равны 999.

293. а) Найдите 13% числа 40.
б) Найдите число, 12% которого равны 24.
в) Сколько процентов числа 480 составляет число 360?

294. а) Число 250 уменьшите на $\frac{2}{5}$ этого числа.

б) Число 300 увеличьте на $\frac{4}{15}$ этого числа.

295. а) Число уменьшили на $\frac{1}{9}$ этого числа и получили 80. Найдите число.

б) Число увеличили на $\frac{3}{7}$ этого числа и получили 500. Найдите число.

296. а) Сумма 12 000 р. увеличилась на вкладе в банке на 5%. Какая сумма получилась?
б) Зарплата работника составила 650 р. С этой суммы удержано: 1% в пенсионный фонд и 12% остатка — подоходный налог. Сколько рублей получит работник?

297. В нашем классе 30 учащихся. В прошлом году $\frac{3}{5}$ класса учились на «4» и «5». В этом году число ребят, которые учатся на «4» и «5», увеличилось на $\frac{1}{9}$. Сколько ребят теперь учатся на «4» и «5»?

298. *Старинная задача.* Некто, отправляясь в лавку, взял с собою 10 р. Если бы он издержал еще четверть тех денег, которые у него остались после покупки, то у него от взятых с собою денег осталось бы только 75 к. Сколько он издержал?

299. Доход предприятия в феврале был на $\frac{1}{5}$ больше, чем в январе, а в марте на $\frac{1}{6}$ больше, чем в феврале. В каком месяце прирост дохода был больше?

300. Предприятие имеет одинаковый для января и февраля план выпуска продукции. План был перевыполнен на 9% в январе и на 11% в феврале. На сколько процентов был перевыполнен план выпуска продукции двух месяцев?

301. а) Через первую трубу бассейн наполняется за 12 ч, через вторую трубу — за 24 ч. За сколько часов бассейн наполнится через обе эти трубы?
б) Первая бригада может выполнить задание за 36 дней, а вторая — за 45 дней. За сколько дней две бригады выполнят задание, работая вместе?

302. а) Два велосипедиста одновременно отправились навстречу друг другу из двух сел. Первый мог бы проехать расстояние между селами за 30 мин, второй — за 45 мин. Через сколько минут они встретятся?
б) Пешеход может пройти расстояние между двумя селами за 6 ч, а велосипедист может проехать это расстояние за 3 ч. Через сколько часов они встретятся, если отправятся одновременно из этих сел навстречу друг другу?

303. Один мастер может выполнить заказ за 2,4 ч, а другой за 4 ч. За сколько часов они выполнят заказ при совместной работе?

304. Имеющихся материалов хватит для работы первого цеха на 30 дней или второго цеха на 42 дня. Хватит ли этих материалов для работы двух цехов в течение 18 дней?

305. Первая бригада, работая отдельно, может выполнить задание за 3 дня, а вместе со второй бригадой — за 2 дня. За сколько дней одна вторая бригада может выполнить то же задание?

ГЛАВА II

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

$(a-b)^2=$

$(a-b)(a+b)=$

$\dfrac{a^2-b^2}{(a-b)^2}=$

§ 4. ОДНОЧЛЕНЫ

4.1. Числовые выражения

При решении многих задач приходится над заданными числами производить арифметические действия: сложение, вычитание, умножение и деление. Но часто, прежде чем доводить до конца каждое из этих действий, удобно заранее указать порядок (план), следуя которому надо производить эти действия. Этот план сводится к тому, что по данным задачи с помощью чисел, знаков действий и скобок составляется **числовое выражение**.

Приведем *примеры* числовых выражений:

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{5}{13}-(3-5)\cdot\frac{3}{4};$$

$$(937-811):63+\frac{3-21}{9}-2\cdot(7-2^4:2);$$

$$(39-15):2^3+\frac{3\cdot 2^2}{3-7}.$$

Если в числовом выражении выполнить все указанные в нем действия, то в результате получим действительное число, про которое говорят, что оно равно данному числовому выражению.

Так первое числовое выражение равно 2, второе равно тоже 2, третье же равно 0. Поэтому пишут:

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{5}{13}-(3-5)\cdot\frac{3}{4}=2;$$

$$(937-811):63+\frac{3-21}{9}-2\cdot(7-2^4:2)=2;$$

$$(39-15):2^3+\frac{3\cdot 2^2}{3-7}=0.$$

Подчеркнем, что числовое выражение определяет, какие арифметические действия и в каком порядке надо произвести над данными числами. Скобки помогают установить порядок действий.

При этом, конечно, предполагается, что все действия возможно осуществить. Поясним эти слова. Всегда возможно произвести сложение, вычитание и умножение любых чисел. А вот делить одно число на другое можно, только если делитель не равен нулю: на нуль делить нельзя. Если в данном выражении на некотором этапе вычислений требуется делить на нуль, то это выражение не имеет смысла.

Например, выражения

$$0{,}37-\frac{3{,}1+0{,}172}{1{,}5+(2-5):2}; \qquad \frac{35{,}079}{\frac{1}{3}-0{,}(3)}$$

не имеют смысла, потому что при выполнении указанных в них действий требуется делить на нуль.

Заметим, что числовое выражение может состоять из одного числа.

306°. Какое числовое выражение имеет смысл; не имеет смысла?

307. Может ли числовое выражение состоять из одного числа?

308. Найдите число, равное данному числовому выражению:

а) $2:\left(-6\frac{7}{13}+3\frac{17}{39}\right)$;

б) $\left(3{,}5\cdot 24-5\frac{2}{3}:\frac{1}{18}\right)\cdot 5$;

в) $3\left(5\frac{4}{9}-6\frac{5}{18}\right)$;

г) $\left(-12\frac{2}{3}\right):3\frac{1}{6}+13{,}5:4{,}5$;

д) $6(-1{,}25)+(-4):\left(-1\frac{1}{3}\right)$;

е) $\left(4{,}3-5\frac{4}{15}\right)\cdot 4\frac{4}{29}-2{,}5\cdot 2$.

309. Установите, какие из следующих выражений имеют смысл и какие не имеют. Для имеющих смысл найдите числа, которым они равны.

а) $\dfrac{4\frac{1}{3}+5{,}4-0{,}2(6)}{0{,}0(23)-0{,}1}:\left(-5+7\frac{2}{3}-2\frac{2}{3}\right)$;

б) $3\frac{1}{7}+1\frac{1}{4}\left(75:\frac{25}{3}-14\right)\frac{4}{7}$;

в) $\left(\dfrac{3{,}(4)+6\frac{5}{9}}{5\frac{7}{8}-2\frac{1}{4}-0{,}5}:\left(12\frac{8}{11}-8\frac{50}{99}\right)\right)\cdot\left(2\frac{3}{8}-1\frac{5}{8}\right)$.

310. Составьте числовое выражение, равное 100; 0,2; -4.

311. Имеет ли смысл данное числовое выражение:

а) $\dfrac{6,19}{6,24-3,12\cdot 2}$; б) $\dfrac{7,8}{-5,64-3,12\overline{33}}$;

в) $\dfrac{2,4:3}{0,6-1,8:3}$; г) $\dfrac{3,4\cdot 1,4}{1,8-3\frac{2}{3}\cdot(-2)}$?

312. Запишите:

а) квадрат числа -2;
б) удвоенное число 12;
в) куб числа 0,5;
г) утроенное число 5;
д) удвоенный квадрат числа 2;
е) утроенный куб числа -1;
ж) произведение чисел -5 и 4;
з) удвоенное произведение чисел 7 и 2;
и) произведение числа 4 и удвоенного числа 6;
к) произведение числа -5 и квадрата числа 3.

4.2. Буквенные выражения

Если в числовом выражении некоторые (или все) входящие в него числа заменить буквами (разные числа — разными буквами), то получится буквенное выражение.

Чаще всего используют буквы латинского алфавита.

Пример 1. Если в числовом выражении

$$\frac{5+3}{2}$$

заменить число 5 буквой a, число 3 буквой b и число 2 буквой c, то получим буквенное выражение

$$\frac{a+b}{c}.$$

Пример 2. Если в числовом выражении

$$\frac{(5-3)+(5-2)}{5-1}$$

заменить число 5 буквой x и число 3 буквой y, то получим буквенное выражение

$$\frac{(x-y)+(x-2)}{x-1}.$$

Вот еще *примеры* буквенных выражений:

$$a+(-a)-(a+3), \quad x+(y+z), \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{x+a}{c-d}.$$

Буквенное выражение может состоять и из одной буквы, например:

$$a,\ c,\ n,\ x.$$

Буквенные выражения называют еще **алгебраическими выражениями**, отдельные числа также называют алгебраическими выражениями.

Если два данных алгебраических выражения соединить знаком сложения, вычитания, умножения или деления, то получим снова алгебраическое выражение, которое называется соответственно *суммой, разностью, произведением* или *частным данных алгебраических выражений*. Впрочем, не для всяких двух выражений можно определить частное. Это связано с делением на 0, о чем мы расскажем позднее.

Например, сумма, разность, произведение и частное двух алгебраических выражений

$$a+1 \quad \text{и} \quad a-b$$

есть, в свою очередь, алгебраические выражения, имеющие соответственно вид:

$$(a+1)+(a-b),$$
$$(a+1)-(a-b),$$
$$(a+1)\cdot(a-b),$$
$$(a+1):(a-b) \text{ или } \frac{a+1}{a-b}.$$

Знак умножения часто опускают. Например, произведение $(a+1)\cdot(a-b)$ записывают и так:

$$(a+1)(a-b).$$

313°. Что называют буквенным выражением? Приведите примеры.

314°. Может ли буквенное выражение состоять из одной буквы?

315°. Можно ли называть число алгебраическим выражением?

316°. Что называют суммой, разностью, произведением, частным двух данных алгебраических выражений? Приведите примеры.

317°. Можно ли опускать знак умножения при записи произведения алгебраических выражений?

318. а) В числовом выражении $\frac{2\cdot5-5:3}{7\cdot5-1}$ замените число 5 буквой a. Запишите полученное выражение.

б) В числовом выражении $4\cdot(6\cdot3-6)-6\cdot(4\cdot3-4)$ замените число 4 буквой a, число 6 — буквой b. Запишите полученное алгебраическое выражение.

319. Напишите алгебраическое выражение, с помощью которого вычисляется:

а) путь при равномерном движении, если скорость движущегося тела v, время движения t;

б) площадь прямоугольника длины a, ширины b;

в) периметр прямоугольника длины k, ширины l;
г) длина окружности радиуса r;
д) площадь круга радиуса R;
е) объем прямоугольного параллелепипеда с длиной ребер a, b, c.

320. Напишите сумму, разность, произведение и частное двух алгебраических выражений: $(a+b)$ и $(3-c)$.

321. Алгебраическое выражение $2n$, где n — любое натуральное число, задает натуральные числа, делящиеся на 2 (четные числа). Напишите алгебраическое выражение, задающее:
а) целые числа, делящиеся нацело на 5;
б) натуральные числа, делящиеся на 5 с остатком 3.

4.3. Понятие одночлена

Одночленом называют алгебраическое выражение, являющееся произведением букв и чисел. Эти буквы и числа называют множителями данного одночлена.

Например, алгебраическое выражение

$$3abc$$

есть одночлен; его множителями являются число 3 и буквы a, b, c.

Заметим, что при записи этого одночлена опущены знаки умножения.

Вот еще *примеры* одночленов:

$$x\cdot(-3)\cdot y\cdot 1\cdot x, \qquad 1\cdot a\cdot(-1)\cdot b, \qquad a\cdot 0\cdot b\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot a.$$

Здесь при записи одночленов знаки умножения не опущены. Число или одну букву также называют одночленом.

Например, алгебраические выражения a, b, c, 1, $\frac{1}{3}$, 0 — одночлены.

Число 0 называют нулевым одночленом.

Сформулируем некоторые свойства одночленов.

Свойство 1. **Два одночлена считают равными, если они отличаются друг от друга лишь порядком множителей.**

Для записи равенства двух одночленов используют знак равенства. Полученное равенство называют **алгебраическим равенством.**

Два одночлена $a3bc$ и $3cba$ равны, так как они отличаются лишь порядком множителей, поэтому пишут алгебраическое равенство

$$a3bc=3cba. \qquad (1)$$

Ниже речь будет идти только об алгебраических равенствах, хотя слово «алгебраическое» часто будет опускаться.

Отметим, что равенство (1) и ниже рассматриваемые равенства одночленов превращаются в верные числовые равенства, если в них заменить буквы числами. Ведь тогда, например, в левой части равенства (1) будет написано произведение чисел, а в правой то же произведение, но с переставленными множителями. А произведение чисел не зависит от порядка его множителей.

Когда говорят, что в равенстве буквы заменяют числами, то имеют в виду, что одна и та же буква, где бы она ни находилась в равенстве, заменяется одним и тем же числом.

Свойство 2. **Два одночлена считают равными, если один из них получен из другого заменой некоторых его числовых множителей их произведением,** например:

$$a \cdot 7 \cdot (-3) \cdot b = a \cdot (-21) \cdot b,$$
$$c \cdot 2 \cdot 4 \cdot b \cdot 3 \cdot 1 \cdot a = c8b3a.$$

Свойство 3. **Одночлен считают равным нулю, если среди его множителей есть число нуль,** например:

$$a \cdot (-1) \cdot b \cdot 0 \cdot c = 0,$$
$$0 \cdot 3 \cdot c \cdot b = 0.$$

Одночлен, среди множителей которого есть число нуль, является **нулевым одночленом.** Остальные одночлены называют **ненулевыми.**

Свойство 4. **Два одночлена считают равными, если один из них получен из другого опусканием множителя** 1, например:

$$a \cdot 1 \cdot b \cdot c = abc,$$
$$1 \cdot abd = abd.$$

322°. Что называют одночленом? Приведите примеры.

323°. Что называют множителями одночлена? Приведите примеры.

324°. Является ли одночленом число; буква?

325°. Что называют нулевым одночленом? Приведите примеры.

326. Приведите примеры алгебраических равенств одночленов.

327. Если в алгебраическом равенстве, получающемся при перестановке множителей одночлена, буквы заменить числами, то получится ли верное числовое равенство? Приведите примеры.

328. Является ли одночленом выражение:

а) a;	б) $a+b$;	в) ba;
г) $b2c$;	д) $\frac{ab}{a+b}$;	е) $\frac{ax}{b}$;
ж) $\frac{3}{4}xy$;	з) $7a-3$;	и) $-1,(26)$;
к) $(a-b) \cdot 3$;	л) $\frac{p}{b}axy$;	м) 0?

329. Назовите числовые и буквенные множители одночлена:

а) $a9$; б) $0{,}6xy$; в) $c\frac{2}{3}$;
г) $b4c$; д) $x(-1)y$; е) a;
ж) $5kb$; з) $0{,}21axy$.

330. Напишите все одночлены, получающиеся изменением порядка множителей одночлена:

а) $3ab$; б) $d(-2)3c$; в) $x7yz$.

331. Упростите запись одночлена:

а) $0ab$; б) $xy0z$; в) $1kpx$; г) $ab1m$;
д) $a5b(-3)c(-8)$; е) $6x\frac{1}{2}y\left(-\frac{1}{3}\right)z$.

4.4. Произведение одночленов

Произведение одночленов равно одночлену, множителями которого являются все множители данных одночленов.

Например, произведение одночлена $a3$ на одночлен bca есть одночлен $a3bca$, что записывают в виде алгебраического равенства

$$a3\cdot bca=a3bca.$$

Произведение k одинаковых одночленов, каждый из которых есть a, кратко обозначают a^k и называют ***k*-й степенью *a***. Число k называют **показателем степени**, а букву a — **основанием степени**. Например, пишут:

$$aa=a^2,$$
$$aaa=a^3,$$
$$aaaa=a^4$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

и говорят соответственно, что

произведение a на a равно a во второй степени, или a в квадрате;

произведение трех множителей, каждый из которых есть a, равно a в третьей степени, или a в кубе;

произведение четырех множителей, каждый из которых есть a, равно a в четвертой степени и т. д.

Пишут также:

$$a^1=a$$

и говорят, что ***a* в первой степени равно *a***.

Если m и n — натуральные числа, то выполняются равенства:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}, \qquad (1)$$
$$(ab)^n=a^n\cdot b^n, \qquad (2)$$
$$(a^m)^n=a^{mn}. \qquad (3)$$

Равенство (1) означает, что при умножении степеней одной и той же буквы показатели степеней складывают, а основание оставляют прежним.

Равенство (2) означает, что при возведении в степень произведения букв надо возвести в эту степень каждую букву и результаты перемножить.

Равенство (3) означает, что при возведении степени буквы в степень надо взять показателем степени произведение показателей степеней, а основание оставить прежним.

Справедливость равенств (1), (2) и (3) подтверждается следующими *примерами*:

$a^3a^2 = aaa \cdot aa = aaaaa = a^5 = a^{3+2}$,

$a^1a^3 = a \cdot aaa = aaaa = a^4 = a^{1+3}$,

$(ab)^2 = ab \cdot ab = aa \cdot bb = a^2b^2$,

$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = aaaaaa = a^6 = a^{2 \cdot 3}$.

Для упрощения записи одночлена одинаковые буквы заменяют соответствующими степенями этих букв. Например, пишут:

$$(-3)\,aaab = (-3)\,a^3b.$$

Сформулируем еще три свойства одночленов.

Свойство 5. **Два одночлена считают равными, если один из них получен из другого заменой произведения множителей, каждый из которых есть одна и та же буква, соответствующей степенью этой буквы,** например:

$$5a^2bab^3 = 5a^3b^4, \qquad 2a^3baa3b^2 = 2a^5 3b^3.$$

Свойство 6. **Если перед одночленом поставить знак плюс, то получится одночлен, равный исходному,** например:

$$+abc = abc,$$
$$+(-7)\,ab = (-7)\,ab.$$

Свойство 7. **Если перед одночленом поставить знак минус, то получится одночлен, равный исходному, умноженному на число (—1),** например:

$$-ab = (-1)\,ab,$$
$$-(-7)\,ab = (-1)(-7)\,ab.$$

Пользуясь свойством 7, получаем равенства:

$$-(-7ab) = (-1)((-1)\,7ab) = (-1)(-1)\,7ab = 7ab,$$
$$-(-a) = (-1)(-1)\,a = a.$$

Одночлен и такой же одночлен, но со знаком минус перед ним называют **противоположными одночленами**. Например, одночлены $3a^2bc$ и $-3a^2bc$ — противоположные одночлены. Чтобы получить один из другого, нужно перед другим поставить знак минус, или, что все равно, умножить его на число -1.

Например, одночлены a и $-a$, так же как $-a$ и $-(-a)$ — противоположные одночлены.

332°. Чему равна первая степень буквы a?

333°. По какому правилу:

а) умножают степени одной и той же буквы;

б) возводят в степень произведение букв;

в) степень буквы возводят в степень?

334°. Сформулируйте свойства одночленов.

335°. Какие одночлены называют противоположными?

336°. Какие одночлены равны 0?

337. Запишите все одночлены, получающиеся изменением порядка множителей одночлена:

а) $a4$; б) $ab3$; в) $2ak5$; г) $a(-2)bc$.

338. Упростите запись одночлена:

а) $0ab$; б) $1kpx$; в) $+xy$; г) $(-1)ab$.

339. Запишите одночлен, противоположный данному:

а) $6ab$; б) $(-3)bc$; в) $8kcp$;
г) p; д) $-k$; е) 0;
ж) $2{,}5$; з) $-18abx$.

340. Запишите произведение одночленов в виде степени, назовите основание и показатель степени:

а) $bbbb$; б) $aaaaa$; в) $ccccccc$; г) $kkkkkkkkk$.

341. Упростите запись одночлена, используя степень:

а) aba; б) $kpppkp$; в) $3abab$;
г) $7xxyyyyx$; д) $ababa$; е) $3a2a3a$;
ж) a^3a^4; з) $a^2a^3a^5$.

342. Упростите запись одночлена, используя свойство степени:

а) a^2a^3; б) b^4b; в) k^5k^3;
г) x^3x^{12}; д) a^3ba^2; е) $k^4n^5k^3n^9$;
ж) $2x^3yx^2y^5$; з) $3a^{10}b^2a^{10}b^2$.

Найдите одночлен, равный произведению одночленов **(343—346)**:

343. а) $3ab\cdot 2a$; б) $8bc^3\cdot bc$;
в) $9ce^2\cdot 6ce$; г) $7e^2k\cdot 6e^3k$;
д) $4ap^2\cdot 5a^2p$; е) $6kp\cdot 7k^2p^2$;
ж) $3a^2bc\cdot 6abc$; з) $4bc^2e\cdot 6b^2ce$;
и) $7c^2ek\cdot 5c^3e^4k$; к) $6e^2k^5p\cdot 8e^3k^4p$;
л) $4k^6p^2x^3\cdot 4k^2p^4x^4$; м) $9px^2y^3\cdot 4p^4x^3y^2$.

344. а) $11pk^2\cdot 4p^3x$; б) $15x^2y^3\cdot 8x^4y$;
в) $3a(-6)a^2b$; г) $(-4)b^2\cdot(-7)bc^2$;
д) $(-5)c^3k\cdot 5ck^2$; е) $(-7)k^2p^3\cdot(-9)kp^3$;
ж) $(-5)p^2x^2\cdot 8p^2x^5$; з) $25x^2y\cdot(-6)x^2y^2$.

345. а) $1\frac{1}{5}a^2b^3\cdot 1\frac{1}{9}ab^2$; б) $\left(-1\frac{2}{3}\right)b^2c^3\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)b^2c^2$;
в) $\frac{1}{2}ck^2\cdot\frac{2}{3}ck$; г) $1\frac{2}{3}k^3p^2\cdot\left(-1\frac{1}{5}\right)kp^2$;

д) $\left(\quad 2\frac{1}{4}\right)p^2x^2\cdot 1\frac{1}{3}px^3$; е) $\left(-\frac{9}{11}\right)x^2y^3\cdot\left(-1\frac{2}{9}\right)xy$;

ж) $\left(-1\frac{2}{3}\right)a^2x^3\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)a^2x^4$; з) $\left(-2\frac{5}{6}\right)a^3c^2\cdot 1\frac{2}{3}ac^2$.

346. а) $\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot a^2b\cdot 5b^2c\cdot(-2)\,ac^2$; б) $3ce\cdot 17ek^3\cdot 2c^3k$;
в) $5b^2c^2\cdot 7ce^3\cdot(-6)\cdot be^3$; г) $(-5)\,e^2k^2\cdot 6e8p$;
д) $7k^2p\cdot 5px\cdot 5k^2x^2$; е) $2px^2\cdot 8x\cdot 12y$;
ж) $12ak^2\cdot(-3)\,kx^2\cdot 2ax$; з) $13a^3k\cdot 5k^3y\cdot ay^3$.

347. Представьте данную степень в виде произведения:
а) $(xy)^2$; б) $(ab)^2$; в) $(2x)^3$;
г) $(3y)^2$; д) $(2abc)^1$; е) $(3muk)^2$;
ж) $(13xy2)^9$; з) $(17cd)^{20}$.

348. Возведите в степень:
а) $(a^2)^2$; б) $(b^2)^3$; в) $(2a)^2$;
г) $(3b)^3$; д) $(4c^2)^2$; е) $(5ab)^2$;
ж) $(7ab^2)^3$; з) $(9b^2c)^2$; и) $(3c^2e^4)^4$;
к) $(2a^2k^3)^5$; л) $\left(\frac{1}{2}a^2\right)^2$; м) $\left(\frac{3}{4}a^2\right)^2$;
н) $\left(-1\frac{1}{2}c^2\right)^2$; о) $\left(-1\frac{1}{3}e^3\right)^3$; п) $\left(1\frac{1}{7}ab\right)^2$;
р) $\left(-\frac{1}{6}px^3\right)^3$.

349. Представьте данный одночлен в виде квадрата другого одночлена:
а) $25a^2$; б) $49b^2$; в) $16c^4$;
г) $81e^6$; д) $64k^8$; е) $\frac{1}{49}p^8$;
ж) $2\frac{1}{4}a^{10}x^6$; з) $2\frac{7}{9}b^{12}y^{10}$.

350. Представьте данный одночлен в виде куба другого одночлена:
а) $8a^3$; б) $27b^3$; в) $125c^6$;
г) $216e^9$; д) $\frac{1}{27}a^9c^3$; е) $\frac{1}{125}b^6y^{12}$;
ж) $15\frac{5}{8}a^{18}p^9$; з) $2\frac{10}{27}b^6c^{18}$.

351. Запишите в таблице произведения одночленов, стоящих в верхней строке и левом столбце:

	$6ab$	$3b^2c$	$4c^3p^2$	$8a^4x^2$	$5b^3y^2$
$3ab$					
$4bc^2$					

352. Запишите:

а) произведение куба a на квадрат b;

б) произведение квадрата a на удвоенное b;

в) произведение куба a на утроенный квадрат b;

г) удвоенное произведение квадрата a на куб a.

353. Запишите в таблице произведение одночленов, стоящих в верхней строке и левом столбце:

	5	$7b$	$12a^2$	$11ax$
$4a$				
$12ab$				
$10ab^2$				

4.5. Стандартный вид одночлена

Говорят, что ненулевой одночлен, содержащий буквы, имеет **стандартный вид**, если он имеет только один числовой множитель, записанный на первом месте, а каждая его буква участвует в его записи лишь один раз в виде некоторой ее степени; при этом буквы записаны в порядке алфавита.

Числовой множитель ненулевого одночлена, содержащего буквы и имеющего стандартный вид, называют **коэффициентом одночлена**.

Например, ненулевые одночлены

$$(-12)\,ab^2c, \qquad \frac{1}{3}\,x^4y^2, \qquad (-1)\,a^2b$$

имеют стандартный вид. Их коэффициенты соответственно равны числам -12, $\frac{1}{3}$, -1.

Если ненулевой одночлен имеет только буквенные множители, то считают, что его коэффициент равен 1.

Например, одночлены

$$a,\ ab,\ x^2yz^2$$

являются одночленами стандартного вида. Коэффициент каждого из них равен 1.

Если коэффициент ненулевого одночлена стандартного вида есть отрицательное число, то такой одночлен записывают еще и так: сначала пишется знак минус, потом абсолютная величина коэффициента, а затем буквенные множители. Например, следующие одночлены

$$-\frac{4}{3}\,x^4y^2, \qquad -a^2b^3$$

считаются одночленами стандартного вида: $-\frac{4}{3}$ — коэффициент первого из них, -1 — коэффициент второго. При этом пишут:

$$\left(-\frac{4}{3}\right)x^4y^2 = -\frac{4}{3}x^4y^2; \qquad -a^2b^3 = (-1)\,a^2b^3.$$

Любое действительное число считается одночленом, записанным в стандартном виде. Например, числа 3, -1, 5 являются одночленами стандартного вида.

Стандартный вид нулевого одночлена есть 0.

Следующие одночлены записаны не в стандартном виде:

$$3a^22bc, \quad (-1)\,ba^2d^3, \quad 7a^4ba^2b^2, \quad 0\cdot a^2b^2.$$

Любой одночлен можно привести к стандартному виду, пользуясь свойствами 1—7. Иначе говоря, для любого одночлена найдется одночлен стандартного вида, которому он равен.

Рассмотрим примеры приведения одночленов к стандартному виду.

Пример 1.

$$b^2a^2(-1)\,c3ab^34c^2 = (-12)\,a^3b^5c^3 = -12a^3b^5c^3.$$

Произведение всех числовых множителей здесь равно -12. Это коэффициент одночлена. Ставим его впереди букв. Произведение степеней b равно $b^2\cdot b^3 = b^5$; произведение степеней c равно $c\cdot c^2 = c^3$; произведение степеней a равно $a^2\cdot a = a^3$. Располагаем буквы a, b, c в порядке латинского алфавита. В итоге получаем первое равенство. Затем, используя соглашение о записи одночлена с отрицательным коэффициентом, пишем второе равенство.

Пример 2.

$$a^35b0c = 0.$$

Это нулевой одночлен, потому что среди его множителей имеется число 0. Его стандартный вид есть число 0.

Степенью ненулевого одночлена называется сумма показателей степеней всех его букв.

Например, одночлен $3a^2b$ — третьей степени, одночлен $3c$ первой степени. Степень одночлена a^22ba равна четырем.

По определению, **действительное, отличное от нуля число считается одночленом нулевой степени.**

Например, одночлены

$$-5; \ 7; \ -0{,}3; \ \frac{7}{16}$$

имеют степень 0.

Число нуль — нулевой одночлен — это единственный одночлен, степень которого не определена.

354°. Какой одночлен называют одночленом стандартного вида?

355°. Что называют коэффициентом одночлена?

356°. Каков стандартный вид нулевого одночлена?

357°. Любой ли одночлен можно привести к стандартному виду?

358°. Что называют степенью одночлена?

359. Укажите коэффициент одночлена, записанного в стандартном виде:

а) $10a$; б) $15a^2b$; в) $127b^3c^4$;
г) a; д) ce; е) $(-8)e^4k^7$;
ж) $(\quad 16)k^2p$; з) $20p^2x^5$; и) $-x^3y^2$;
к) $\frac{1}{2}ac$.

360. Назовите одночлены стандартного вида, определите их коэффициенты и степени; укажите одночлены, отличающиеся только коэффициентами.

а) $1\frac{1}{2}a$; б) b; в) $\quad c$;
г) $4ab$; д) $-2a$; е) $20b^2$;
ж) $10a^2bc$; з) $7b$; и) $5ba^2c$;
к) $3a^2bc$; л) $-6{,}41a$; м) $8{,}3ba$;
н) $3b8$; о) $\frac{3}{25}b^5$; п) $15p^2$;
р) $2\frac{1}{4}b^2$.

361. Приведите одночлен к стандартному виду:

а) $(-2)b3$; б) $4a8$;
в) $(\quad 2)bb^24$; г) $3a^2a^38$;
д) $px^2(\quad 1)p^3x^6$; е) $16x^4y^33x^2y$;
ж) $(-3)b^3c^2b^4c(\quad 4)$; з) $3c^2k^3(-4)ck^2$.

362. Запишите:

а) произведение квадрата a и b;
б) произведение куба a и удвоенного b;
в) удвоенное произведение a и квадрата b;
г) сумму квадратов a и b;
д) квадрат суммы a и b;
е) произведение квадрата a и квадрата b;
ж) сумму кубов a и b;
з) произведение b и куба a.

363. Приведите одночлен к стандартному виду, найдите его коэффициент и степень:

а) $3acb5$; б) $dcab$; в) $(-1)ac5b$;
г) $cdab$; д) $\frac{1}{500}xy(\quad 1)yzx^2$; е) $\left(-\frac{4}{3}\right)xy^2(0{,}3)^2zx^4$;
ж) ba; з) $7x0y$; и) $-\frac{7}{13}$;
к) 0.

4.6. Подобные одночлены

Ненулевые одночлены стандартного вида называют подобными, если они равны или если они отличаются лишь своими коэффициентами.

Например, одночлены $3ab$ и $5ab$ подобны, так как они отличаются лишь своими коэффициентами.

Чтобы узнать, подобны ли данные одночлены, их надо привести к стандартному виду.

Выясним, подобны ли одночлены $abab^2$ и $baab^2$.

Приведем их к стандартному виду:

$$abab^2 = a^2b^3 \quad \text{и} \quad baab^2 = a^2b^3.$$

Одночлены подобны, потому что после приведения их к стандартному виду видно, что они равны.

Одночлены

$$-3a^2bc \quad \text{и} \quad a^2(-2)\,b3c = -6a^2bc$$

также подобны, потому что после приведения их к стандартному виду видно, что они отличаются лишь коэффициентами.

Среди одночленов

$$a^2,\ b^2,\ a^3,\ 1,\ 3a^2b,\ 3ab^2$$

нет подобных — любые два из них не подобны.

По определению, **сумма подобных одночленов равна одночлену, подобному каждому из них, с коэффициентом, равным сумме данных коэффициентов.** Если сумма коэффициентов равна нулю, то и сумма одночленов равна нулю.

Например:

$$3a^2b + 2a^2b = (3+2)\,a^2b = 5a^2b,$$
$$2x^3y^2 + (-2)\,x^3y^2 = (2-2)\,x^3y^2 = 0\cdot x^3y^2 = 0,$$
$$7xyz + 3xyz + (-5)\,xyz = (7+3+(-5))\,xyz = 5xyz.$$

По определению, **разность двух подобных одночленов равна одночлену, подобному каждому из них, с коэффициентом, равным разности коэффициентов уменьшаемого и вычитаемого.** Если разность коэффициентов равна нулю, то и разность одночленов равна нулю.

Например:

$$2abc^2 - 7abc^2 = (2-7)\,abc^2 = (-5)\,abc^2 = -5abc^2,$$
$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}a = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)a = \frac{1}{6}a,$$
$$3ac - 3ac = (3-3)\,ac = 0ac = 0.$$

Разность двух подобных одночленов можно заменить суммой уменьшаемого и одночлена, противоположного вычитаемому.

Например, так как

$$7ab-3ab=(7-3)\,ab=4ab,$$
$$7ab+(-3ab)=(7+(-3))\,ab=4ab,$$

то

$$7ab-3ab=7ab+(-3ab).$$

Замену суммы подобных одночленов одночленом, равным этой сумме, называют приведением подобных.

Примеры приведения подобных одночленов:

$$\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)a=\left(\frac{4}{12}-\frac{6}{12}+\frac{3}{12}\right)a=-\frac{1}{12}a,$$
$$\frac{2}{7}xy-\frac{6}{7}xy+\frac{4}{7}xy=\left(\frac{2}{7}-\frac{6}{7}+\frac{4}{7}\right)xy=0xy=0.$$

Отметим, что эти равенства, если в них заменить буквы числами, превращаются в верные числовые равенства на основании распределительного закона для чисел.

364°. Какие одночлены называют подобными?

365°. Как складывают (вычитают) подобные одночлены?

366. Приведите примеры равной нулю суммы (разности) подобных одночленов.

367. Как разность двух подобных одночленов заменить суммой двух других одночленов?

368°. Как привести подобные одночлены?

369. Если в алгебраическом равенстве, получающемся при приведении подобных одночленов, заменить буквы числами, то получится ли верное числовое равенство? Почему? Приведите примеры.

Среди одночленов найдите подобные (**370—371**):

370. а) a^2bc, $2abca$, a^3bc, $-3bca^2$;
б) a^2b, $-aba^2$, $-3a^2b0$, $7a^2ba$.

371. $2a^3b$; $3a^4b^2$; $4a^3b$; $80a^4b^2$; a^3b; $-a^4b^2$; a; $6p^2x$; $-c$; $(-5)\,a^3b$; $6a^4b^2$; $-4p^2x$.

372. Найдите одночлен, равный сумме подобных одночленов:
а) $2x+3x$; б) $3m+5m$;
в) $a+4a+a$; г) $3b+b+b$;
д) $2a+4a+6a$; е) $4ab+ab+12ab$;
ж) $17a^2+13a^2+11a^2$; з) $15a^2b+14a^2b+7a^2b$;
и) $43ce^2+(-17)\,ce^2+11ce^2$;
к) $25b^2c^2+(-27)\,b^2c^2+7b^2c^2$.

373. Найдите одночлен, равный разности подобных одночленов:
а) $7x-2x$; б) $a-3a$;
в) $10a-18a$; г) $-4b-2b$;
д) $3bc-17bc$; е) $mk-2mk$;
ж) $28a^2-17a^2$; з) $4b^2c-12b^2c$;
и) $17a^2b^2-9a^2b^2$; к) $24b^2c^3-(-17)\,b^2c^3$.

374. Найдите сумму подобных одночленов:

а) $a^2bc+2abca+(-3bca^2)$;
б) $(-aba^2)+7a^2ba+a^3b$;
в) $7a^2+(-3a^2)+(-4a^2)$.

375. Найдите разность подобных одночленов:

а) $3abc-7abc$; б) $9a^3b^2-9a^3b^2$;
в) $5a-6a$; г) $7a-a$.

376. Приведите подобные члены:

а) $18a^2b-4a^2b+6a^2b$;
б) $6a^8b^2+7a^8b^2+(-2)a^8b^2$;
в) $4b^3c^4+8b^3c^4-14b^3c^4$;
г) $0c^2e^5+4c^2e^5-16c^2e^5$;
д) $2{,}1a^2e-1{,}6a^2e+1{,}5a^2e$;
е) $6{,}46a^4k+2{,}14a^4k-8{,}6a^4k$;
ж) $5{,}18a^2p^3+3{,}22a^2p^3-2{,}4a^2p^3$;
з) $7{,}14ax^2+4{,}36ax^2-12{,}8ax^2$.

§ 5. МНОГОЧЛЕНЫ

5.1. Понятие многочлена

Многочленом называют сумму одночленов. Одночлены, входящие в эту сумму, называют членами многочлена.

Примеры:

а) $a^2+2ab+b^2$ — многочлен, a^2, $2ab$, b^2 — его члены;
б) a^3+b^3 — многочлен, a^3, b^3 — его члены;
в) $\frac{1}{3}a^2+(-2b)+(-b^2)$ — многочлен, $\frac{1}{3}a^2$, $-2b$, $-b^2$ — его члены.

Многочлен $\frac{1}{3}a^2+(-2b)+(-b^2)$ принято еще записывать так:

$$\frac{1}{3}a^2-2b-b^2.$$

Это выражение также называют многочленом, несмотря на то, что в его записи участвует знак минус. Надо иметь в виду, что, называя данное выражение многочленом, считают, что его второй член есть $(-2b)$, а третий есть $(-b^2)$.

В силу этого соглашения равны многочлены

$$\frac{1}{3}a^2+(-2b)+(-b^2) \quad \text{и} \quad \frac{1}{3}a^2-2b-b^2.$$

Для записи равенства двух многочленов употребляют знак равенства. Полученное равенство называют алгебраическим равенством. Поэтому имеет место алгебраическое равенство

$$\frac{1}{3}a^2+(-2b)+(-b^2)=\frac{1}{3}a^2-2b-b^2. \qquad (1)$$

Подобным образом пишут:

$$x^3 - y^3 = x^3 + (-y^3),$$
$$(-x^2) + (-y^2) = -x^2 - y^2.$$

Далее мы будем говорить только об алгебраических равенствах, хотя слово «алгебраическое» будем часто опускать.

Одночлен также называют многочленом.

Поэтому выражения

$$a^2, \ -2ab, \ \frac{7}{3}, \ -\frac{5}{9}, \ 0, \ a$$

можно рассматривать не только как одночлены, но и как многочлены.

Число нуль называют нулевым многочленом.

377°. Что называют многочленом; членами многочлена? Приведите пример многочлена и укажите все его члены.

378°. Можно ли считать одночлен многочленом? Что такое нулевой многочлен?

379°. Можно ли считать число 2,(5) многочленом?

380°. Приведите примеры алгебраических равенств многочленов.

381°. Назовите члены многочлена:
а) $a + b + c$; б) $a^2 + ab + b^2$;
в) $a^2 - 2ab + b^2$; г) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

382. Выпишите все члены многочлена:
а) $2x^2 - 3xy - xy + 7y$; б) $-x^7 + x^5 - 2x^3 - 3x$.

383. Запишите многочлен, членами которого являются одночлены:
а) a и c; б) $2x$ и y^2;
в) $2a$, b^3 и (-2); г) x^4, $0,5y^2$, $(-x)$ и $(-5xy)$.

384. Запишите выражение в виде суммы:
а) $a - b$; б) $2a - 3$;
в) $-xy - y^2$; г) $-2x^2 - 0,5y$.

385. Является ли многочленом выражение:
а) $2a + 7,2$; б) $x^2 - 3x + 4$; в) $\frac{a}{b} - 4$;
г) $\frac{3m}{1-n}$; д) $7,823$; е) 0?

5.2. Свойства многочленов

Многочлены преобразуют по определенным правилам, которые называют свойствами многочленов.

Свойство 1. **Члены многочлена можно менять местами.**

Иначе говоря, два многочлена считают равными, если они отличаются друг от друга лишь порядком их членов.

Например, имеют место следующие алгебраические равенства:

$$\begin{aligned}&2a^2b+3ab^2=3ab^2+2a^2b;\\&a^2-b^2=-b^2+a^2;\\&x^2-x+1=1-x+x^2=-x+x^2+1.\end{aligned}\qquad (1)$$

Свойство 2. **Прибавление к многочлену нуля (нулевого многочлена) не изменяет его.**

Иначе говоря, два многочлена считают равными, если один из них получен из другого прибавлением числа нуль.

Например,

$$\begin{aligned}&a^4+(-a^2)+0=a^4+(-a^2);\\&0+abc=abc;\\&2a-3b+0-c=2a-3b-c.\end{aligned}\qquad (2)$$

Свойство 3. **В многочлене можно приводить подобные члены.**

Иначе говоря, два многочлена считаются равными, если один из них получен из другого заменой подобных членов их суммой.

Например,

а) $a^2+ab-ab+b^2=a^2+1ab+(-1)ab+b^2=$
$=a^2+(1+(-1))ab+b^2=a^2+0\cdot ab+b^2=$
$=a^2+0+b^2=a^2+b^2;$

б) $a^3-2a^2b+2ab^2-a^2b+ab^2-b^3=$
$=a^3+\underline{(-2)a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}+\underline{(-1)a^2b}+\underline{\underline{1\cdot ab^2}}-b^3=$
$=a^3+((-2)+(-1))a^2b+(2+1)ab^2-b^3=$
$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

Мы подчеркнули одной или двумя чертами две пары подобных членов, а затем привели подобные члены.

Многочлены можно упрощать, пользуясь их свойствами. Рассмотренные нами примеры и есть упрощения многочленов.

Отметим, что рассмотренные выше алгебраические равенства превращаются в верные числовые равенства, если в них буквы заменить числами. Например, равенства (1) превращаются тогда в верные числовые равенства на основании переместительного закона сложения чисел. Равенства (2) превращаются в верные числовые равенства потому, что от прибавления числа 0 к сумме чисел сумма не изменяется.

Еще раз отметим, что когда говорят, что в равенстве буквы заменяются числами, то имеют в виду, что одна и та же буква, где бы она ни находилась в равенстве, заменяется одним и тем же числом.

386°. Сформулируйте свойства многочленов.

387°. Если в алгебраических равенствах (1) и (2) буквы заменить числами, то на основании каких свойств чисел получатся верные числовые равенства?

388°. Какими свойствами многочленов воспользовались при упрощении многочлена:

а) $a+b-a=a-a+b=0+b=b$;

б) $2x-y+x-3y-5x=2x+x-5x-y-3y=$
$=(2+1-5)x-(1+3)y=-2x-4y$?

Упростите многочлен (**389—391**):

389. а) $2a+5b+7a$;
б) $2x+3y+10x$;
в) $7a+b+3a+b$;
г) $a+7b+b+2a$;
д) $2x+y+3x+y+4x$;
е) $a+2x+5x+2a+9x$.

390. а) $12a+5b-4a$;
б) $19x-24y+x$;
в) $17x-4y+5x+4y$;
г) $5a-2y+4a+2y$;
д) $40x+15y-40x-16y$;
е) $9a-3b+5a-7b-8a$;
ж) $2b-6y+b+5y-3b$;
з) $a+2x+a-13x-2a$.

391. а) $1{,}1x-2{,}7y+0{,}8x-x+3y$;
б) $27a-3{,}1b+9a-3{,}1a+0{,}4b-a$;
в) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y-2x+1\frac{1}{4}y$;
г) $15a-4x-5{,}6a+2{,}3x+a$;
д) $67{,}1a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{5}a+2b+2{,}5a-7b$;
е) $\frac{1}{4}b-7x-3{,}2b+2\frac{3}{4}x+b+0{,}6x$;
ж) $xyx-2x^2y+2x-3x$;
з) $ba^2-3a^3+7aba+3a^2-8a^2b$.

392. Решите уравнение:
а) $3x+2x=10$; б) $5x+x=6$;
в) $4x-3x=5$; г) $4x+2x-x=10$.

5.3. Многочлены стандартного вида

Говорят, что **многочлен имеет стандартный вид, если все его члены записаны в стандартном виде и среди них нет подобных.**

Приведем примеры многочленов стандартного вида:

$$2,\ a,\ a-b,\ a^2+2ab+b^2,\ \frac{1}{7}-a,\ 0.$$

Примерами многочленов нестандартного вида могут служить следующие многочлены:

$$a\cdot a-5a+6,$$
$$a^3-2ab+b^2-3ab-11,$$
$$3-5+a^2.$$

У первого из них не все члены записаны в стандартном виде. У второго есть подобные члены — второй и четвертый, и у третьего подобны первый и второй члены.

Многочлен стандартного вида, состоящий из двух членов, называют *двучленом*; многочлен стандартного вида, состоящий из трех членов, называют *трехчленом* и т. д.

Приведем *примеры*:

двучленов $\frac{1}{7}a^2-2b$, $ab-cd$;

трехчленов $3a-2b-7$, $x+yz-2z^2$;

четырехчленов $a+b-c-d$, $-abc-acd-bcd-abd$.

Напомним, что одночлен также называют многочленом, состоящим из одного члена.

Любой многочлен можно привести к стандартному виду. Для этого необходимо: 1) каждый его член привести к стандартному виду; 2) привести подобные члены.

Например:

$$\begin{aligned}&a^3+2aba+b^2a+ba^2-2abb-b^2b=\\&=a^3+\underline{2a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}+\underline{a^2b}-\underline{\underline{2ab^2}}-b^3=\\&=a^3+(2+1)\,a^2b+(1-2)\,ab^2-b^3=\\&=a^3+3a^2b-ab^2-b^3.\end{aligned}$$

В этом примере сначала все члены данного многочлена привели к стандартному виду, у полученного многочлена подчеркнули одной и двумя чертами две пары подобных членов и после приведения подобных членов получили многочлен стандартного вида.

З а м е ч а н и е. Если многочлен после приведения его к стандартному виду обращается в 0, то он является нулевым многочленом.

Например, рассмотрим многочлены $a-a$ и $3x^2-x^2-2x^2$. Они записаны не в стандартном виде. После приведения к стандартному виду они обращаются в 0:

$$\begin{aligned}&a-a=0,\\&3x^2-x^2-2x^2=0.\end{aligned}$$

Следовательно, это нулевые многочлены.

Степенью ненулевого многочлена называют наибольшую из степеней одночленов, входящих в этот многочлен, когда он приведен к стандартному виду.

Например, многочлен

$$\frac{1}{3}a^2-2b+7$$

имеет степень два, так как он записан в стандартном виде, входящие в него одночлены имеют степени 2, 1 и 0, наибольшая из которых 2.

Многочлен $-x^3yz-x+y^2$ имеет степень пять, так как он записан в стандартном виде и входящие в него одночлены имеют степени 5, 1 и 2. Очевидно, $ab+c$ — многочлен второй степени и abc — многочлен третьей степени.

Многочлен

$$2x-5$$

имеет степень один. Говорят еще, что это многочлен первой степени относительно x.

Аналогично многочлен

$$2a-3b+7$$

есть многочлен первой степени относительно a и b.

Любое действительное, отличное от нуля, число есть многочлен нулевой степени. Нуль — единственный многочлен, степень которого не определена.

393°. Какой многочлен называют многочленом стандартного вида? Приведите примеры.

394°. Любой ли многочлен можно привести к стандартному виду?

395°. Что называют двучленом, трехчленом? Приведите примеры.

396°. Что нужно сделать для того, чтобы привести многочлен к стандартному виду?

397°. Что называют степенью ненулевого многочлена?

398°. Определена ли степень нулевого многочлена?

399. Имеет ли многочлен стандартный вид:

а) $m-3n+2m$; б) $a\cdot 2b-3a^2+b$;
в) $3xy-3yx+1$; г) a^2+ab+b^2+ab;
д) $x^5-2x^4+3x^3-1$; е) $ba-a^2b-a^3b$;
ж) $a^3b+ab^3-a^2b^2+2bab^2$?

400. Приведите многочлен к стандартному виду, определите коэффициенты и степени его членов:

а) $b+b+ac+ac+ac$;
б) $2a^2-3b+b-7a^2-b$;
в) $xx+xx+x-2x$;
г) $2a^3+4a^3-5a^2+5a^2$.

401. Приведите многочлен к стандартному виду, определите его степень:

а) $4a^2b+5b^2a+baa+3aba$;
б) $5a^3-7ax^3-2ax^3-a^3x-ax^3$;
в) $3ax^2-3a^2x+2a^2x^2-7a^2x^2-a^2x$;
г) $6n^3-8p^2n^3+p^2n^3+12n^3p^2+2n^3$;

д) $7a^3 - 8aba^2 + 3a^2 - 4b$;
е) $x^5 - 7y^2 + 3xyx^4 + 2x - 1$;
ж) $ac + 2abc - 7a^2 + 3ca - 3cab$.

402. Упростите выражение:
а) $2aa + a \cdot 3a + a^2$;
б) $2x^2 \cdot 3xy - 4x \cdot 5x^2y$;
в) $y^2 \cdot 2x - 3x^2 \cdot 2y + 2xy \cdot 2y - xy \cdot (-4x)$;
г) $xx \cdot (-2x) - y \cdot 3xy + 7x^2 \cdot (-2x) - 4y^2 \cdot 2x$.

403. Решите уравнение:
а) $3x - x = 8$;
б) $2x - 3x + 2 = 5$;
в) $3x - 7 - 5x + 4x = 1$;
г) $2y - 5 - 12y + 3 + 3y = 12$.

404. Вместо букв C и D подберите одночлены так, чтобы выполнялось алгебраическое равенство:
а) $2a + C + a + 5b = 3a + 8b$;
б) $3x + C + y + D = 11x + 5y$;
в) $C - 2a + 3b - D = 10a - 4b$;
г) $C + D + x = 25x + 17y$.

5.4. Сумма и разность многочленов

Сумма многочленов равна многочлену, членами которого являются все члены данных многочленов.

Например, сумма двух многочленов

$$a^2 + ab \text{ и } b^2 + ac$$

равна многочлену

$$a^2 + ab + b^2 + ac.$$

Это можно записать в виде алгебраического равенства

$$(a^2 + ab) + (b^2 + ac) = a^2 + ab + b^2 + ac.$$

Разность двух многочленов равна многочлену, членами которого являются все члены уменьшаемого и взятые с противоположными знаками все члены вычитаемого.

Например, разность двух многочленов

$$a^2 + ab \text{ и } b^2 + ac$$

равна многочлену

$$a^2 + ab - b^2 - ac.$$

Иначе говоря, можно написать алгебраическое равенство

$$(a^2 + ab) - (b^2 + ac) = a^2 + ab - b^2 - ac.$$

Переход от левой части алгебраических равенств

$$(a^2+ab)+(b^2+ac)=a^2+ab+b^2+ac \text{ и}$$
$$(a^2+ab)-(b^2+ac)=a^2+ab-b^2-ac$$

к правой называют *раскрытием скобок.*

При раскрытии скобок пользуются правилами:

если перед скобками стоит знак плюс, то скобки можно опустить, не меняя знаки слагаемых, заключенных в скобки;

если перед скобками стоит знак минус, то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключенного в скобки, на противоположный.

Если перед скобками нет никакого знака, то подразумевается, что стоит знак плюс.

Например, $(a-b)+(d-c)-(x-y)-(z-t)=$
$=a-b+d-c-x+y-z+t.$

Переход от правой части этого равенства к левой называют *заключением в скобки.*

Воспользуемся следующим правилом заключения в скобки:

чтобы заключить многочлен в скобки со знаком плюс перед ними, надо записать в скобках все его члены с теми же знаками;

чтобы заключить многочлен в скобки со знаком минус перед ними, надо записать в скобках все его члены с противоположными знаками.

Например: $a-b-c+d=(a-b)+(-c+d)$,
$a-b-c+d=(a-b)-(c-d)$.

Отметим, что алгебраические равенства, получающиеся при раскрытии скобок и заключении в скобки, при замене в них букв числами обращаются в верные числовые равенства на основании сочетательного закона сложения чисел и правила умножения чисел на -1.

405°. Сформулируйте правило раскрытия скобок.

406°. Как надо заключать многочлен в скобки?

407°. Во что превращается алгебраическое равенство, получающееся при раскрытии скобок или при заключении в скобки, если в нем заменить буквы числами? Приведите примеры.

408. Запишите задание в виде числового выражения и вычислите:

а) прибавить к 0,5 сумму чисел 1,7 и 1,2;
б) уменьшить 17 на сумму чисел 7 и 5;
в) сумму чисел 8,3 и 2,7 увеличить на 4;
г) 17 уменьшить на разность чисел 7 и 5;
д) сумму чисел 1,8 и 1,7 уменьшить на 2;
е) разность чисел 2,8 и 1,1 увеличить на 2,2;
ж) разность чисел 20,5 и 10,7 уменьшить на 5,7.

409. Вычислите наиболее простым способом:

а) $213+(395+187)$;

б) $(41,7+2,8)+1,3$;

в) $(7,12+6,3)-1,12$;

г) $12,5-(5,4-3,5)$.

410. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

а) $5a-a$; б) $x-6x$;

в) $2a-7a+5$; г) $7-4x+2x-1$;

д) $a+(a+1)$; е) $(x-1)+6$;

ж) $a+b+(a-b)$; з) $(x-y)+(x-y)$.

411. Упростите выражение:

а) $7a+(2a+3b)$; б) $9x+(2y-5x)$;

в) $(5x+7a)+4a$; г) $(5x-7a)+5a$;

д) $(3x-6y)-4x$; е) $(2a+5b)-7b$;

ж) $3m-(5n+2m)$; з) $6p-(5p-3a)$.

412. Найдите многочлен, равный сумме многочленов:

а) $3a$ и $(a+2b)$;

б) $7x$ и $(2-3x)$;

в) $(3-2a)$ и $(-5a-7)$;

г) $(3x-y)$ и $(-2x+4y)$.

413. Найдите многочлен, равный разности многочленов:

а) $(a+b)$ и $4a$;

б) $6x$ и $(4-7x)$;

в) $(4b+2)$ и $(5-b)$;

г) $(2x-7a)$ и $(4a+x)$.

414. Раскройте скобки и упростите полученное выражение:

а) $(5a+3)-(a+b)$;

б) $(3x-1)-(y-2x)$;

в) $(2a+b)-(a+2b)$;

г) $(x-2y)-(2x-4y)$.

415. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(5a^2-4a)-(2a^2+5a)$;

б) $(3x-5x^3)-(7x^3-4x)$;

в) $(a+b+c)+(a-b+c)$;

г) $(x-y+n)+(x-y-n)$;

д) $(7a-3b)-(5a+3b)-(a-5b)$;

е) $(8x-5)+(3x-7)-(9x-11)$;

ж) $43x-19y-(15x-34y)+(9x-7y)$;

з) $48a-(2a-2b)-(14b-28a)+(24b-18a)$.

416. Упростите выражение $5-7a-(8-6a)+(5+a)$.

417. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(x^2+4x)+(x^2-x+1)-(x^2-x)$;

б) $(a^5+5a^2+3a-a)-(a^3-3a^2+a)$;

в) $(x^2-3x+2)-(-2x-3)$;
г) $(abc+1)+(-1-abc)$.

418. Вместо букв M и N подберите одночлены так, чтобы выполнялось алгебраическое равенство:
а) $(a+b+c)+(M-N+c)=4a-2b+2c$;
б) $(7x-N)-(M+2y)=3x-2y$;
в) $(M+N)-(2a-b)+(a-4b)=5a+7b$;
г) $(a-M)-(N+7b)-(2a+b)=-5a-10b$.

419. Упростите:
а) $(2a^2b-10b^3)-(4a^2b-12b^3)$;
б) $(3xy^2+7x^2y)-(2xy^2-6x^2y)$;
в) $12ab-30bc-3cx-(15bc+9cx)$;
г) $(10abc-8bcx-21cxy)-(-6abc+bcx-cxy)$;
д) $(0{,}6ab-0{,}5bc+cx)-(2{,}5bc-0{,}5ab-cx)$;
е) $\left(\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{2}{3}ab-\frac{5}{6}a^2b-1\right)-\left(a^2b-\frac{1}{3}x^2y^2+\frac{1}{12}ab-\frac{1}{4}\right)$.

420. Решите уравнение:
а) $2x+(3x+1)=4$;
б) $(2x+5)+(3x-8)=7$;
в) $2x-(x-1)=3$;
г) $(2x-3)-(x+1)=1$.

421. При некоторых преобразованиях бывает необходимо изменить знак, стоящий перед скобками, на противоположный, например: $(a-b)=-(-a+b)=-(b-a)$.
Используя этот прием, измените знак, стоящий перед двучленом:
а) $(2a-3b)$; б) $(x+y)$;
в) $(-a-b)$; г) $(-7a+3)$.

422. Даны многочлены: $A=a+b$, $B=3a-2b$, $C=a-7b$.
Найдите:
а) $A+B+C$; б) $A+B-C$;
в) $A-B-C$; г) $-A-B-C$.

423. Заключите первые два члена многочлена в скобки со знаком минус перед ними, а последние — в скобки со знаком плюс перед ними:
а) x^2-y^2+2x-1; б) $9y^2-1+x^2-6y$;
в) $-a^3-3a^2+4-a$; г) $-x+y+x^2-y^2$.

424. Дан многочлен $a+b-c-p$. Представьте его как:
а) сумму многочленов, чтобы одно из слагаемых было $(a+b)$;
б) разность многочленов, чтобы уменьшаемое было $(a+b)$;
в) разность многочленов, чтобы уменьшаемое было $(b-c)$.

5.5. Произведение одночлена на многочлен

Произведение одночлена на многочлен равно многочлену, членами которого являются произведения этого одночлена на каждый член данного многочлена.

Например, произведение одночлена a на многочлен $a-b$ равно многочлену $aa-ab$. Это записывают в виде алгебраического равенства

$$a(a-b)=aa-ab=a^2-ab. \qquad (1)$$

В последнем равенстве мы привели многочлен к стандартному виду.

Равенство (1), написанное в обратном порядке, имеет вид:

$$a^2-ab=a(a-b). \qquad (2)$$

В данном случае многочлен a^2-ab преобразован в произведение одночлена a и многочлена $a-b$.

Преобразование многочленов в произведение одночлена и многочлена называют *вынесением за скобки* общего множителя многочлена.

В равенстве (2) мы вынесли за скобки общий множитель (одночлен) a многочлена a^2-ab.

Вот еще пример вынесения за скобки общего множителя:

$$x^4y-x^2y^2=x^2y(x^2-y).$$

Данный многочлен и многочлен, полученный умножением его на число -1, называют противоположными многочленами.

Например, многочлены

$$ab-2b^3 \quad \text{и} \quad -ab+2b^3$$

— противоположные многочлены.

Легко видеть, что сумма противоположных многочленов равна нулю, например:

$$(ab-2b^3)+(-ab+2b^3)=ab-2b^3-ab+2b^3=$$
$$=(1-1)ab+(-2+2)b^3=0\cdot ab+0\cdot b^3=0.$$

Легко проверить, что *разность двух многочленов есть сумма уменьшаемого и многочлена, противоположного вычитаемому.*

Наконец, отметим, что **если число 1 умножить на многочлен, то в результате получится тот же самый многочлен.** Например,

$$1\cdot(a^2+b^3)=1\cdot a^2+1\cdot b^3=a^2+b^3.$$

425°. По какому правилу умножают одночлен на многочлен?

426°. Какие многочлены называют противоположными?

427°. Каким свойством обладают противоположные многочлены?

428°. Каким свойством обладает разность многочленов?

429. Изменится ли многочлен, если его умножить на 1?

430. Укажите, какие свойства чисел используются при умножении многозначного числа на однозначное:

$$123\cdot3=(100+20+3)\cdot3=100\cdot3+20\cdot3+3\cdot3=$$
$$=300+60+9=369?$$

Найдите многочлен, равный произведению одночлена на многочлен (**431—433**):

431. а) 3 и $(a+b)$; б) x и $(a-b)$;
в) $(x+1)$ и 5; г) $(a-b)$ и x.

432. а) $(a+3)\,7$; б) $(x-y)\,10$;
в) $a\,(x-y)$; г) $a\,(a+b)$;
д) $(a+b-c)\,2$; е) $(a-b)(-6)$;
ж) $x\,(x-y+c)$; з) $(a-b)\,5a$.

433. а) $(-2)(x+y)$;
б) $(7+3y-x^2y)(-2xy)$;
в) $3ab\,(a^2-2a+1)$;
г) $2a\,(x+y)$;
д) $(x^2+2xy+y^2)(-12xy^3)$;
е) $21a^2b^5\,(a^3-4ab^2-b^2)$;
ж) $(-abc)(ab+ac+bc)$;
з) $-ac\,(a+2c)$.

434. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:
а) $2\,(a+b)+4\,(a+b)$;
б) $4\,(x-y)+7\,(x-y)$;
в) $4-2\,(x+1)$;
г) $2a-3\,(b-a)$;
д) $2\,(a-b)-3\,(a+b)$;
е) $a\,(x-y)-b\,(x+y)$;
ж) $3a^2-a\,(3a-4b)-2\,(b-4a)$;
з) $2ab\,(a+2b)-3ab^2\,(a-4)$.

435. Решите уравнение:
а) $3\,(x-2)=8$;
б) $(x+2)\,4=7$;
в) $(2x+1)\,9=9$;
г) $5\,(2-3x)-7=0$;
д) $3\,(x-5)+8=17$;
е) $6\,(x-3)+2\,(x+2)=10$;
ж) $5\,(x-1)-4\,(x-2)=10$.

436. Упростите выражение:
а) $a\,(b-c)+b\,(c-a)+c\,(a-b)$;
б) $a\,(b+c-bc)-b\,(c+a-ac)+c\,(b-a)$.

437. Вычислите наиболее простым способом:
а) $11\cdot98+11\cdot2$; б) $17\cdot8-17\cdot7$;
в) $25\cdot65-61\cdot25$; г) $19\cdot450+550\cdot19$.

Вынесите за скобки общий множитель многочлена **(438—441)**:

438. а) $3a+3b$; б) $2x-2y$;
в) $5a+10$; г) $14-7y$;
д) $12x+6y$; е) $3a-9b$;
ж) $5x+5$; з) $4-4a$;
и) $12a-3$; к) $18+36x$;
л) $ab+bc$; м) $ax-ay$;
н) $2ab-6a$; о) $6x+8xy$;
п) $12abx+15a$.

439. а) a^2+ab; б) x^2-x;
в) $a+a^2$; г) $2xy-x^3$;
д) b^3-b^2; е) a^4+a^3b;
ж) $x^2y^2+y^4$; з) $4a^6-2a^3b$;
и) $9x^4-12x^2y^4$.

440. а) $ax-bx+cx$;
б) $8abx-6acy-10ak$;
в) $14acx-21bcy-7c$;
г) $63xy-84y^2+98ay$;
д) $15abx-96y^2+12ab$;
е) $20ax-35bx-40x^2$.

441. а) $a^2-a^3+a^4$; б) x^3+x^2-x;
в) a^3+4b^2a; г) $-5x^3y^2-5x^2y$;
д) $x^3y^4-x^2y^2+xy^3$;
е) $2a^3b-6ab^4+4a^2b^3$;
ж) $-2a^2b+4ab^2-4b^3$.

442. Напишите многочлен, противоположный данному:
а) $2a-3bc+2a^2$; б) $-3xy^2-5x^3+y^4$;
в) $-3x+mn-2y$; г) $3pq+2p^2-3q^3$.

443. Подберите вместо букв M и N одночлены так, чтобы равенство было верным:
а) $2\cdot(M-b)=14a-2b$;
б) $M\cdot(2a+3b)=-6a-9b$;
в) $N\cdot(2x-M)=12x^2-18xy$;
г) $3a\cdot(N+M)=15abc-3ac^2$.

444. Решите уравнение:
а) $2(x-3)=6$;
б) $(x-2)4=15$;
в) $5(2x-1)-7-x=0$;
г) $3(x-3)-5-(2x-5)4=0$.

5.6. Произведение многочленов

Произведение двух многочленов равно многочлену, членами которого являются произведения каждого члена одного многочлена на каждый член другого многочлена.

Таким образом, чтобы найти произведение многочленов, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные одночлены сложить.

Пользуясь этим правилом, найдем произведение двух многочленов: $a+b$ и $a-b$:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b)&=aa+ba+a(-b)+b(-b)=\\&=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2.\end{aligned}\tag{1}$$

В равенствах (1) полученный многочлен приведен к стандартному виду.

Очевидно, что произведение двух многочленов не зависит от того, будем ли мы умножать первый многочлен на второй или второй на первый.

Если надо найти произведение нескольких многочленов, то сначала находят произведение любых двух из них, затем полученный многочлен умножают на любой третий многочлен и т. д. Например:

$$\begin{aligned}(a-b)(2a+b)(3a-2b)&=(a2a-b2a+ab-bb)(3a-2b)=\\&=(2a^2-ab-b^2)(3a-2b)=\\&=2a^23a-ab3a-b^23a+2a^2(-2b)+ab2b+b^22b=\\&=6a^3-\underline{3a^2b}-\underline{\underline{3ab^2}}-\underline{4a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}+2b^3=\\&=6a^3-7a^2b-ab^2+2b^3.\end{aligned}\tag{2}$$

Равенства (1) и (2), если их записать в обратном порядке, имеют вид:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),\tag{3}$$

$$6a^3-7a^2b-ab^2+2b^3=(a-b)(2a+b)(3a-2b)\tag{4}$$

и могут служить примерами разложения многочлена на множители.

Разложением многочлена на множители называют его преобразование в произведение двух или нескольких многочленов.

Любой многочлен можно разложить на два множителя, один из которых есть не равное нулю число.

Примеры:

$$x^2+y^2=3\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2\right),$$

$$3a^2-2ab+b^2=5\left(\frac{3}{5}a^2-\frac{2}{5}ab+\frac{1}{5}b^2\right).$$

Это — разложение на множители, один из которых имеет нулевую степень, а другой — ту же степень, что и исходный многочлен. Более интересны разложения на множители, каждый из которых имеет степень, большую нуля. Такими являются разложения (3) и (4).

Замечания. 1. Если нужно перемножить многочлены нестандартного вида, то естественно сначала привести их к стандартному виду, а потом уже применить правило умножения многочленов; результат будет тот же, но вычисления, как правило, значительно сократятся.

Например:

$$(a^2-ab+ab-b^2)(2a-b-a)=$$
$$=(a^2-b^2)(a-b)=a^3-a^2b-ab^2+b^3.$$

2. Произведение нулевого многочлена на любой многочлен есть нулевой многочлен, например:

$$(a-a)(a^2+ab+b^2)=0\cdot(a^2+ab+b^2)=$$
$$=0\cdot a^2+0\cdot ab+0\cdot b^2=0+0+0=0.$$

445°. Чему равно произведение двух многочленов?

446°. Зависит ли произведение двух многочленов от порядка множителей?

447°. По какому правилу умножают три (и более) многочлена?

448°. Что называют разложением многочлена на множители?

449°. Следует ли приводить перемножаемые многочлены к стандартному виду?

450°. Чему равно произведение многочленов, один из которых нулевой?

451°. Как называют данное выражение:

а) $(a+b)2a$; б) $3a^2(a-b)$;

в) $(x+y)(x+1)$; г) $(x+2y)(x^2-y)$;

д) $(m+n)^2$; е) $(p-q)^2$?

452. Запишите произведение:

а) квадрата x и суммы x и y;

б) удвоенного a и разности a и 5;

в) суммы a и b и числа 7;

г) разности 3 и x и половины b;

д) квадрата a и суммы x и удвоенного y;

е) удвоенного квадрата a и разности 5 и b;

ж) разности a и b и их удвоенной суммы;

з) квадрата d и утроенной разности a и b;

и) квадрата разности a и b и числа 6.

Выполните умножение **(453—454)**:

453. а) $(a+1)(a+1)$; б) $(x+1)(x+2)$;

в) $(2+y)(y+3)$; г) $(a+b)(a+b)$;

д) $(1+x)(1-x)$; е) $(a-2)(3-a)$;

ж) $(x-y)(x+y)$; з) $(a-b)(a-b)$;
и) $(2a+b)(a+2b)$; к) $(3x+2y)(3x+2y)$.

454. а) $(5m+7n)(2n+4m)$;
б) $(12a+b)(3a+5b)$;
в) $(2x-3y)(2x+3y)$;
г) $(5m-2n)(3n-5m)$;
д) $(-a-b)(2a-3b)$;
е) $(-7x-4y)(-5x+7y)$;
ж) $(a^2+b^2)(a^2+b^2)$;
з) $(mn^3-m^2)(m-1)$;
и) $(2x^2-y^2)(y^2+2x^3)$;
к) $(xy^2+3a^2)(3xy+a^3)$.

455. Преобразуйте произведение многочленов в многочлен стандартного вида:
а) $(a+1)(a+1)(a+1)$;
б) $(x-1)(x-1)(x-1)$;
в) $(a+b)(a-b)(a+b)$;
г) $(m-n)(m-n)(m+n)$;
д) $(a+b+c)(a+1)$;
е) $(a-b-c)(a-1)$;
ж) $(x+1)(x^2-x+1)$;
з) $(x-1)(x^2+x+1)$;
и) $(x^3+2x-3)(2-3x)$;
к) $(5m^2-3mn+n^2)(2n-m^2)$;
л) $(a+b+c)(a+b-c)$;
м) $(a-b+c)(a-b-c)$.

456. Преобразуйте произведение в многочлен:
а) $-(a+b)(a+b)$;
б) $-(x-y)(x+y)$;
в) $-(x-y)(x-y)$;
г) $-(2m-n)(n-3m)$;
д) $-(5a-2b)(3b+2a)$;
е) $-7(x+8y)(y-3x)$.

457. Пользуясь рисунком 10, докажите, что

$$(a+b)(a+b)=a\cdot a+a\cdot b+$$
$$+b\cdot a+b\cdot b=a^2+2ab+b^2.$$

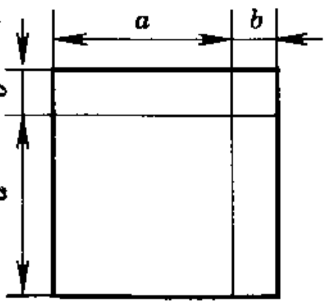


Рис. 10

458. Упростите выражение:
а) $(8x-3)(4x+5)$;
б) $8x-3\cdot 4x+5$;
в) $(4a-3)\cdot 2a-3$;
г) $4a-3(2a-3)$.

459. Преобразуйте произведение в многочлен стандартного вида:

а) $(0{,}1-x)(x+0{,}1)$;
б) $(1{,}2-a)(1{,}2+a)$;
в) $\left(\frac{1}{3}-m\right)\left(\frac{1}{2}m-3\right)$;
г) $\left(\frac{1}{5}a-\frac{3}{7}b\right)(14a+b)$;
д) $(0{,}05y-2{,}3x)(y-0{,}2x)$;
е) $(2{,}5a+3b)(0{,}1b-4a)$;
ж) $\left(\frac{2}{3}m+3n\right)\left(6m-\frac{1}{6}n\right)$;
з) $\left(1\frac{1}{2}x-y\right)\left(2\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}x\right)$.

460. Докажите алгебраическое равенство:

а) $(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$;
б) $2x^2-11x+15=(x-3)(2x-5)$.

461. Верно ли выполнены преобразования:

а) $(2x+3y)(3x-2y)=6x^2-4xy+9xy-6y^2=6x^2+$
$+5xy-6y^2$;
б) $(xy^2+x^2y)(xy+3)=x^2y^3+3xy^2+x^3y^2+3x^2y$?

462. Вместо звездочки подберите одночлен, чтобы выполнялось алгебраическое равенство:

а) $(a+*)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2$;
б) $9-3a-3a+a^2=9-*+a^2$.

463. Преобразуйте произведение многочленов в многочлен стандартного вида:

а) $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$;
б) $(a+b+c)(a+b-c)$;
в) $(a+2b)(a-2b)(a^2+4b^2)$.

464. Разложите выражение на множители:

а) $2x+2y$; б) $6a-3$;
в) $ax-ab$; г) $2a+6ab$;
д) a^2+a; е) $3x^3y-xy^2$;
ж) $ax+bx+cx$; з) $5a^3+10a^2+15a$.

465. Составьте два выражения, каждое из которых можно разложить на множители вынесением общего множителя $2x$ за скобки.

466. Представьте выражение в виде произведения:

а) $2a+4b$; б) $ba-b$; в) $6x-2$;
г) $yx+2y$; д) $3a-12b$; е) $7x-28xy$.

467. Разложите на множители:

а) $x(a+b)+y(a+b)$; б) $(a+b)a-b(a+b)$;
в) $m(n-3)+2(n-3)$; г) $(x+y)3-a(x+y)$;
д) $2a(1-b)-3(1-b)$; е) $a(b+3)-b(3+b)$;

ж) $7x(x+2y)-2(2y+x)$;
з) $a(a+b)+(a+b)$;
и) $2x(x+2y)+3y(x+2y)$;
к) $2x(a-1)-(a-1)$.

468. При преобразованиях бывает необходимо изменять знаки членов многочлена на противоположные, *например:*

$$(a+b)=(-1)(-a-b)=-(-a-b), \text{ или}$$
$$(a-b)=(-1)(-a+b)=-(b-a).$$

Используя этот прием, разложите на множители:

а) $a(x-y)+b(y-x)$;
б) $x(a-b)+y(b-a)$;
в) $3(m-n)-a(n-m)$;
г) $7a(a-b)-5(b-a)$;
д) $a(a-b)+4(b-a)$;
е) $6(x-1)-x(1-x)$;
ж) $p(1-p)-3(p-1)$;
з) $x^2(y-3)+7(3-y)$.

469. Разложите выражение на множители:

а) $a(b-1)-(1-b)$;
б) $(a+b)+3a(a+b)$;
в) $2x(a-b)-(b-a)$;
г) $3+a+a(3+a)$;
д) $(m-2n)-x(2n-m)$;
е) $a-b-x(b-a)$.

470. Решите уравнение:

а) $(2x+5)+(3x+8)=7$;
б) $2x+(x-3)-23-(2-3x)=0$;
в) $4+x-8+(2x-5)=0$;
г) $(2x-3)-(x+1)=1$.

471. Упростите выражение:

а) $(2x-2a)(3a^2-4a+5)$;
б) $(7x^2-2x+4-x^2)(2x-x-1)$;
в) $(x^2+3x-2)(2x^2-x+4)$;
г) $(2m^3-7m^2+4m)(3-8m+m^2)$;
д) $(2a+1)(3+a)(5a+2)$;
е) $(x-3)(2x-1)(7+2x)$;
ж) $(2m-n)(3n+2m)(m-5n)$;
з) $(p-8q)(4q-p)(p+8q)$.

5.7. Целые выражения

Целым выражением называют такое алгебраическое выражение, в котором несколько многочленов соединены знаками сложения, вычитания и умножения.

Например:

$$(a+b)(c-d)+(a-b)-(c-d),$$
$$-a(b-c)^3+(d-c)-a^3-5,$$
$$-(a-b)-cd.$$

Считают, что многочлен также есть целое выражение.

Целые выражения можно упрощать, пользуясь правилами сложения, вычитания и умножения многочленов.

Как следует из этих правил, любое целое выражение можно преобразовать в многочлен стандартного вида. Следовательно, любое целое выражение равно некоторому многочлену.

Рассмотрим *пример* упрощения целого выражения:

$$15a^3b^2-(3a^2b+a)(5ab-2)=$$
$$=15a^3b^2-(3a^2b5ab-3a^2b\cdot 2+a5ab-a\cdot 2)=$$
$$=15a^3b^2-15a^3b^2+6a^2b-5a^2b+2a=$$
$$=(15-15)a^3b^2+(6-5)a^2b+2a=0+a^2b+2a=a^2b+2a.$$

472°. Что называют целым выражением? Приведите примеры.

473°. Является ли целым выражением: а) число; б) одночлен; в) многочлен?

474°. Любое ли целое выражение можно преобразовать в многочлен стандартного вида?

475°. Может ли целое выражение равняться нулевому многочлену? Приведите примеры.

476. Какие из данных выражений являются целыми:

а) $7\left(2\frac{1}{2}-5\cdot 24\right)$; б) $7a^2bc$;

в) $3xy(2a+3b)$; г) $(x-2)(3y+4)-\frac{2abc}{mn}$;

д) $\left(\frac{7}{8}a^2-\frac{3}{5}ab^4\right)\frac{7}{12}a-8b^4$; е) $2x(3-x)+4-8x$?

477. Упростите выражение:

а) $2(x-1)+3(2-x)$;
б) $2ab(3-2a)+4b(3a-7a^2)$;
в) $7m(m-n)-3n(n+m)$;
г) $(x-2y)\cdot 2xy-28x^2y$.

478. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите его степень.

Чтобы избежать ошибок со знаком при вычислении, например, следует выполнить преобразования так:

$$(x+1)(x+2)-(x+3)(x+4)=(x^2+2x+x+2)-$$
$$-(x^2+4x+3x+12)=(x^2+3x+2)-(x^2+7x+12)=$$
$$=x^2+3x+2-x^2-7x-12=-4x-10.$$

а) $2x+(x-1)(x+1)$;
б) $7p^2-(p+1)(p+2)$;
в) $(a+2)(a-1)-(a+1)(a-2)$;
г) $(p+2)(p-1)+(p+3)(p-5)$;
д) $(4-x)(2-x)-(x+2)(1-x)$.

Упростите целое выражение **(479—480)**:

479. а) $(5ab^2+4b^3)(3ab^3-4a^2)-18a^2b^3$;

б) $(7x^3y^2-xy)(-2x^2y^2+5xy^3)+12x^5y^4$;

в) $(x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y)-x^2y(x-y)$;

г) $a^2(a^2-b^2)-(a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)$;

д) $2-(-4x+1)(x-1)+2(6x-4)(x+3)$;

е) $6(x+1)(x+1)+2(x-1)(x^2+x+1)-2(x+1)$;

ж) $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-3)(x+3)$;

з) $3(3x-1)(2x+5)-6(2x-1)(x+2)$;

и) $(x^2+2)(x^2+2)-(x-2)(x+2)(x^2+4)$;

к) $5(a-2)(a+2)-\frac{1}{2}(8a-6)(8a-6)+17$.

480. а) $(a^2+1)(a^2+1)+(a-1)(a^2+1)-a^2$;

б) $(x^2-1)(x^4+x^2+1)-(x^2-1)(x^2-1)(x^2-1)$;

в) $\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m^2-\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}m^3-\frac{1}{2}m^2\right)$;

г) $\left(\frac{1}{2}a-2b\right)\left(\frac{1}{4}a^2+ab+4b^2\right)-\left(\frac{1}{8}a^3-8b^3\right)$;

д) $15x^3y^2-(5xy-2)(3x^2y+x)$;

е) $(a+b+c)(a+b-c)-2ab$;

ж) $(a+2b)(a+c)-(a-2b)(a-c)$.

481. Найдите число a, если:

а) удвоенное число a равно 28;

б) утроенное число a равно 9;

в) вдвое меньшее число равно 5;

г) впятеро большее число равно 6;

д) втрое большее число равно 2;

е) втрое меньшее число равно 7.

482. Решите уравнение:

а) $2(x+1)9=9$;

б) $0{,}1(1{,}2x-2)-2(0{,}5\cdot x)=0{,}68$;

в) $\frac{1}{2}(x+8)+1\frac{1}{3}+2\left(1\frac{1}{5}-x\right)=0$;

г) $\frac{2}{5}(0{,}5x-3)-0{,}2\left(2\frac{1}{2}-5x\right)-\frac{1}{3}(0{,}5x-3)=0$.

5.8. Числовое значение целого выражения

Рассмотрим сначала целое выражение, в которое входит одна буква:

$$a^2+5a-13. \qquad (1)$$

Если вместо буквы a (где бы она ни стояла в этом выражении) подставить число 3, то получим числовое выражение:

$$3^2+5\cdot3-13,$$

равное 11. Это число 11 называют **числовым значением выражения** (1) при $a=3$.

Числовое значение этого же выражения при $a=0$ равно -13, а при $a=-0{,}1$ равно $-13{,}49$ и т. д.

Рассмотрим теперь выражение

$$0{,}2a+3b-ab+\frac{7}{4}, \qquad (2)$$

в которое входят две буквы.

Если вместо буквы a, где бы она ни стояла в этом выражении, подставить число $(-0{,}1)$, а вместо буквы b, где бы она ни стояла в этом выражении, подставить число 2,5, то получим числовое выражение

$$0{,}2\cdot(-0{,}1)+3\cdot2{,}5-(-0{,}1)\cdot2{,}5+\frac{7}{4},$$

равное числу 9,48. Это число называют **числовым значением выражения** (2) при $a=-0{,}1$ и $b=2{,}5$. При $a=0$ и $b=0$ числовое значение этого выражения равно $\frac{7}{4}$, а при $a=-3$ и $b=0$ оно равно $\frac{23}{20}$ и т. д.

Аналогично определяются числовые значения целых выражений, содержащих три, четыре и более букв.

Пример 1. Числовое значение выражения

$$\frac{1}{6}a-\frac{1}{15}b+c(a+b)$$

при $a=3$, $b=-5$, $c=0{,}3$ равно

$$\frac{1}{6}\cdot3-\frac{1}{15}\cdot(-5)+0{,}3\cdot(3+(-5))=\frac{7}{30}.$$

Пример 2. Числовое значение выражения

$$x-y+t(z-x)+z(t+y)$$

при $x=-0{,}1$, $y=-3{,}2$, $z=1{,}7$, $t=3{,}5$ равно

$$(-0{,}1)-(-3{,}2)+3{,}5(1{,}7-(-0{,}1))+1{,}7(3{,}5+(-3{,}2))=9{,}91.$$

Подчеркнем, что для любого целого выражения при любых выбранных числовых значениях входящих в него букв соответствующее числовое выражение имеет смысл, так как не содержит деления на нуль.

483°. Что называют числовым значением целого выражения при данных числовых значениях букв?

484. Вычислите значение выражения при $x=-10$.

Например, если $x=-2$, *то* $2x^2-7x+5=$
$=2(-2)^2-7(-2)+5=2\cdot4+7\cdot2+5=8+14+5=27.$

а) $3x-8$; б) $3x^2+4x+1$;

в) $x^4+2x^3+8x^2+x$.

485. Вычислите значение выражения при $a=-1$, $b=2$, $c=3$:

а) abc; б) ab^2c^3;
в) $3a^2(bc)^3$; г) $(2ab)^3c^2$;
д) $(a^2-b^2)-3c$; е) $7(a^3-b^2)^2+c^3$.

486. Заполните таблицу:

x	1	3	0	-1	-5	0,5	$-\frac{1}{3}$
$x-1$							
x^2-1							
x^2-3x							
$2x^2-3x+7$							

487. Вычислите значение выражения:

а) x^2, если: $x=0{,}3$; $x=0{,}01$; $x=1{,}7$; $x=0{,}001$; $x=0{,}05$;
б) a^2 при заданных значениях a. Результаты запишите в таблицу:

a	7	1	-1	2	3	4	-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{2}$
a^2										

488°. Верно ли, что числовое значение выражения $-a$ отрицательно при любых числовых значениях a?

489. При каких числовых значениях a и b верно равенство:
а) $a+b=0$; б) $a\cdot b=1$;
в) $a\cdot b=a$; г) $a\cdot b=-1$?

490. Вычислите значение выражения при $x=-1\frac{1}{3}$:
а) $-x^2$; б) $(-x)^2$; в) $-x^3$; г) $(-x)^3$.

491. В каких случаях при возведении в натуральную степень $k\ (k>1)$ положительного числа получится число, большее данного; меньшее данного?

492. При каких значениях a верно равенство:
а) $-a^2=(-a)^2$; б) $-a^3=(-a)^3$;
в) $a^2=a^3$; г) $a^2+a^3=0$?

493. Вычислите площадь S квадрата со стороной:
а) 3 см; б) 5 см; в) 10 см;
г) 0,5 см; д) 2,1 м; е) 1,5 м.

494. Вычислите объем V куба, ребро которого равно:
а) 1 см; б) 3 см; в) 10 см;
г) 20 см; д) 0,5 м; е) 1,2 м.

495. Вычислите значение выражения:

а) $(3a^2b-5x)(7a-4bx^2)$ при $a=1$, $b=1$, $x=1$;

б) $(2xy^2-3a)(4x-5ya^3)$ при $x=1$, $y=-1$, $a=2$;

в) $(x^3yz^2-4xy^3)(3x^2y^3-5xy^2z^3)$ при $x=2$, $y=-1$, $z=-1$;

г) $(a^2b^2c-3b^5c^3)(5a^3bc^4+7ab^4c)$ при $a=-1$, $b=-1$, $c=-1$.

496. Решите уравнение:

а) $5(2-3x)-3(2-x)-2(3x-8)+7(2x-8)=0$;

б) $0{,}6(x-0{,}6)-1-0{,}8(0{,}4-x)=0$;

в) $-2\left(3\frac{1}{2}x-0{,}3\right)+x-0{,}3\left(x-\frac{1}{10}\right)=0$.

497. Найдите число, если его сумма с числом:

а) большим на 1, равна 19;

б) меньшим на 7, равна 13;

в) вдвое большим, равна 18;

г) втрое меньшим, равна 48.

Вычислите значение выражения **(498—499)**:

498. а) $(a+b+c)(a^2+b^2)$ при $a=-3$, $b=-2$, $c=4$;

б) $(a+b-c)(a^2-b^2)$ при $a=3$, $b=2$, $c=-4$;

в) $(0{,}1-x)(0{,}1+y)(0{,}1+z)$ при $x=2$, $y=-1$, $z=2$;

г) $(x+0{,}1y)(0{,}1x+y)(0{,}1x+y)$ при $x=-2$, $y=1$;

д) $\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-x\right)$ при $x=4$;

е) $\left(\frac{1}{3}p+\frac{1}{2}q\right)\left(\frac{1}{3}p+\frac{1}{2}q\right)\left(\frac{1}{3}p+\frac{1}{2}q\right)$ при $p=9$, $q=-1$;

ж) $(1+x)(x+2)(3+x)(x+4)$ при $x=-\frac{1}{3}$;

з) $(a-1)(a+1)(b-1)(b+1)$ при $a=-3$, $b=-5$;

и) $(m-n)(m+n)(n-m)(n+m)$ при $m=-0{,}5$, $n=0{,}3$;

к) $(1-x)(x-2)(3-x)(x-4)$ при $x=2$.

499. а) $a^2+5a-13$ при $a=-3$;

б) $0{,}2a^2+3b-\frac{1}{5}a+\frac{7}{4}$ при $a=1$, $b=-2$;

в) $x-y+(z-x)+z(t+y)$ при $x=0$, $y=-1$, $z=-3$, $t=2$;

г) $2x+3y-z+3$ при $x=1$, $y=-1$, $z=-1$;

д) $\frac{1}{3}a-\frac{1}{15}b+c(a+b)$ при $a=3$, $b=-5$, $c=0{,}3$;

е) $(a-b)(c-d)$ при $a=1$, $b=2$, $c=-3$, $d=4$.

5.9. Тождественное равенство целых выражений

В § 4 и § 5 рассматривались алгебраические равенства. Рассмотрим одно из таких равенств для одночленов:

$$2aaabb = 2ababa. \qquad (1)$$

Оно превращается в верное числовое равенство, если в нем заменить буквы числами. Ведь тогда в левой его части будет стоять произведение чисел, а в правой — то же произведение, но с переставленными множителями, а произведение чисел не зависит от порядка его множителей.

Когда говорят, что в алгебраическом равенстве буквы заменяются числами, то имеют в виду, что одна и та же буква, где бы она ни находилась в равенстве, заменяется одним и тем же числом.

Рассмотрим теперь алгебраическое равенство для многочленов

$$x + y = y + x. \qquad (2)$$

Оно превращается в верное числовое равенство, если в нем заменить буквы числами. Ведь тогда в левой части будет стоять сумма чисел, а в правой — та же сумма, но с переставленными слагаемыми, а сумма чисел не зависит от порядка ее слагаемых.

Вообще, если приравнять данный многочлен к многочлену, полученному из данного перестановкой его членов, то получится алгебраическое равенство между данным и полученным многочленами. Но если подставить в это равенство вместо букв любые числа, то получится верное числовое равенство, потому что сумма чисел не изменится, если в ней переставить местами слагаемые. Аналогичные рассуждения показывают, что алгебраические равенства, получаемые при приведении подобных членов, при умножении одночлена на многочлен, многочлена на многочлен и т. д., превращаются в верные числовые равенства, если в них заменить буквы числами.

Равенство между алгебраическими выражениями называют тождеством, если оно превращается в верное числовое равенство при подстановке в него вместо букв любых чисел.

Все алгебраические равенства между целыми выражениями есть тождества.

В частности, равенства (1) и (2) являются тождествами.

Нулевые многочлены равны нулю тождественно, т. е. при любых числовых значениях входящих в них букв их числовое значение есть нуль. Такими многочленами являются, например, многочлены:

$$a - a,$$
$$3x^2 - x^2 - 2x^2.$$

Остальные (ненулевые) многочлены могут обращаться в нуль только при определенных числовых значениях букв, но не тождественно, т. е. для каждого ненулевого многочлена существуют числовые значения букв, при которых многочлен не обращается в нуль. Вот примеры ненулевых многочленов:

$$a+b,$$
$$x-y,$$
$$a^2+b^2+1.$$

Первый многочлен $a+b$ обращается в нуль лишь для числовых значений a и b, удовлетворяющих равенству $a=-b$, но для остальных числовых значений a и b он не обращается в нуль.

Второй многочлен $x-y$ обращается в нуль лишь для числовых значений x и y, удовлетворяющих равенству $x=y$, но он не обращается в нуль для остальных числовых значений x и y.

Третий многочлен a^2+b^2+1 не обращается в нуль ни для каких числовых значений a и b.

500°. Что называют тождеством?

501°. Приведите примеры тождественно равных целых выражений.

502°. Приведите примеры многочленов, тождественно равных нулю.

503°. Является ли тождеством алгебраическое равенство между целыми выражениями?

504. Являются ли следующие выражения тождественно равными (объясните почему):

а) $(x+y)$ и $(y+x)$;
б) $c(3xy)$ и $3cxy$;
в) $(2a+7+a)$ и $(3a+7)$;
г) $x(3x-8)$ и $(3x^2-8x)$;
д) $(3m-2n)$ и $(m-2n+m)$;
е) $(2x-3)$ и $(3x+5)$?

505. Являются ли следующие равенства тождествами (объясните почему):

а) $2+x=x+2$;
б) $2a+5=a-1+a+6$;
в) $x^2-x+3=3-x+x^2$;
г) $2(3x-1)=6x-2$;
д) $x+y-2x+3y=4y-x$;
е) $2a-b3+3b=2a$?

506. Докажите алгебраическое равенство:

а) $a-b=-(b-a)$;
б) $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$;
в) $(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$;
г) $(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$;
д) $(m-n)(m^2+mn+n^2)=m^3-n^3$;
е) $(m+n)(m^2-mn+n^2)=m^3+n^3$;

ж) $(p+1)(p+1)(p+1)=p^3+3p^2+3p+1$;

з) $(q-1)(q-1)(q-1)=q^3-3q^2+3q-1$.

507*. Найдите многочлен, равный произведению:

а) $(x^2+y^2+x+y)(x+y+xy)$;

б) $(2a^2bc-3b^2c-7bc^2)(a^2c-b^3c^2+3bc^3-8c^2)$;

в) $(m^2-mn^2-mn-n^2)(m-mn-n^2+n)$;

г) $(0{,}1p^3-2p^2q-0{,}5pq^2+1{,}2p^3)(8p^2-0{,}2pq+5q^2)$.

508. Докажите алгебраическое равенство:

а) $(m-n)(2m+3n)(m-7)+7(2m^2+2mn-3n^2)=$
$=m(2m^2+mn-3n^2+7n)$;

б) $(a^3b-b^2)(a^2-2b)(a-3b)+3a^2b^2(a^3-2ab-b)+$
$+2b^2(a^4-ab+3b^2)=a^3b(a^3-b)$.

§ 6. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

6.1. Квадрат суммы

По определению

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b).$$

Пользуясь правилом умножения многочлена на многочлен, получаем:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a\cdot a+b\cdot a+a\cdot b+b\cdot b=$$
$$=a^2+2ab+b^2. \qquad (1)$$

Равенства (1) являются тождествами, потому что если вместо a и b подставить в них любые числа, то на основании распределительного и переместительного законов для чисел получим верные числовые равенства.

Равенство

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (2)$$

называют **формулой квадрата суммы.**

Так как в формуле (2) можно считать, что a и b — произвольные числа, то ее обычно читают так: **квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.**

Формула квадрата суммы часто применяется для упрощения вычислений, например:

$$51^2=(50+1)^2=50^2+2\cdot 50+1^2=2601.$$

Формула (2), если ее читать справа налево, показывает, что многочлен $a^2+2ab+b^2$ можно разложить на множители, а именно представить как произведение двух одинаковых множителей $(a+b)$.

509. Запишите и прочитайте формулу квадрата суммы.

510°. Является ли формула квадрата суммы тождеством? Почему?

511. Запишите выражение в виде произведения:

а) 4^4; б) $(-3)^3$; в) x^2;
г) $-a^2$; д) $(x+y)^2$; е) $(a+2)^2$;
ж) $(5+m)^3$; з) $(p+q)^3$.

512°. Преобразуйте выражение в одночлен стандартного вида:

а) $2\cdot\frac{1}{2}$; б) $2\left(-1\frac{1}{2}\right)$;
в) $2aa^2b$; г) $2\left(-\frac{1}{3}x\right)\left(-4\frac{1}{2}xy\right)$;
д) $m^2nk^2mn^3k^4$; е) $p^3q^4rp^2q^3r^4$;
ж) $-4a^2bc^2\left(-\frac{1}{2}\right)abc^2$; з) $1\frac{1}{3}xy^33x^3yz^2$.

513. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида двумя способами:

а) $(m+n)^2$; б) $(2+x)^2$; в) $(y+4)^2$;
г) $(1+p)^2$; д) $(2x+1)^2$; е) $(2+3a)^2$;
ж) $(2m+5n)^2$; з) $(3x+4y)^2$.

Например:

$$(2a+3b)^2=(2a+3b)(2a+3b)=4a^2+6ab+6ab+9b^2=$$
$$=4a^2+12ab+9b^2;$$
$$(2a+3b)^2=(2a)^2+2\cdot 2a3b+(3b)^2=4a^2+12ab+9b^2.$$

514. Используя формулу квадрата суммы, преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(a^2+b)^2$; б) $(x+y^3)^2$;
в) $(m^2+n^2)^2$; г) $(p^3+q^5)^2$;
д) $(ab+c)^2$; е) $(x+yz)^2$;
ж) $(3m+n^3)^2$; з) $(2p+3q^2)^2$;
и) $(3ab^2+2c^3)^2$.

515. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $\left(\frac{1}{2}+a\right)^2$; б) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$;
в) $(m+0{,}2)^2$; г) $(1{,}1+p)^2$;
д) $\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b\right)^2$; е) $\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{5}y\right)^2$;
ж) $(0{,}2m+2{,}1n)^2$; з) $(0{,}4p+0{,}3q)^2$;
и) $\left(\frac{3}{5}ab+\frac{1}{2}c^2\right)^2$.

516. Используя рисунок 10 на с. 101, докажите формулу квадрата суммы.

517. Примените формулу квадрата суммы для вычисления:

а) 41^2; б) 91^2; в) 201^2;
г) 32^2; д) 72^2; е) 302^2.

518. Любое натуральное число, оканчивающееся цифрой 5, можно записать в виде $10a+5$.
Например, $25=2\cdot 10+5$.

Докажите, что для вычисления квадрата такого числа можно к произведению $a(a+1)$ приписать справа 25.
Например, $25^2=\underline{6}25$ $(2\cdot 3=\underline{6})$.

519. Представьте многочлен в виде квадрата суммы:

а) $x^2+2xy+y^2$; б) $a^2+4ab+4b^2$;
в) $9m^2+6mn+n^2$; г) $16p^2+40pq+25q^2$;
д) x^2+2x+1; е) $9+6a+a^2$;
ж) $16+8p+p^2$; з) $4m^2+9n^2+12mn$;
и) $x^4+2x^2y^3+y^6$; к) $a^6+2a^3b^3+b^6$.

520. Вместо букв C и D подберите одночлены так, чтобы выполнялось алгебраическое равенство:

а) $(a+C)^2=D+2ab+b^2$;
б) $(2x+C)^2=4x^2+4xy+y^2$;
в) $(C+3m)^2=4n^2+12mn+9m^2$;
г) $(C+D)^2=9p^2+30pq+25q^2$.

521. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(a+b)^2+(a+b)(a-b)$;
б) $(a+3)^2+(x+1)^2$;
в) $2(m+1)^2+3(m+2)^2$;
г) $5(p+q)^2+3(p+2q)^2$;
д) $(2a+3b)^2-(3a+2b)^2$;
е) $2(3x+y)-3(2x+3y)$;
ж) $(m+n)^2-3(m-n)(2n+m)+(2m+n)^2$;
з) $2(p+3q)(q-p)-(p+2q)^2-2(3q+p)^2$;
и) $(a+b)^3$; к) $(2x+y)^3$.

522. Запишите в виде многочлена выражение:

а) $(a+2b)(a+2b)$; б) $(2x+3y)^2$;
в) $(3x+y)^2+(x+3y)^2$; г) $(x+2)^2$.

523. Выясните, является ли многочлен квадратом какого-либо двучлена:

а) $a^2+4ac+4c^2$; б) $1+x^2+2x$;
в) $a^2c^2+2acd+d^2$; г) $9+6x+x^2$.

524. Часто используют приближенное равенство $(1+x)^2\approx$ $\approx 1+2x$, если x достаточно мало по сравнению с 1. *Например:*

$$1{,}001^2=(1+0{,}001)^2\approx 1+0{,}002=1{,}002.$$

Используя это приближенное равенство, вычислите:

а) $1{,}0002^2$; б) $1{,}00001^2$;
в) $1{,}000003^2$; г) $1{,}0000004^2$.

6.2. Квадрат разности

Очевидны следующие равенства:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=aa-ba-ab+b^2=a^2-2ab+b^2,$$

откуда

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \qquad (1)$$

Это равенство называют **формулой квадрата разности**. На основании распределительного и переместительного законов для чисел равенство (1) является тождеством. Оно читается так: **квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа**.

Эта формула также часто применяется для упрощения вычислений, например:

$$49^2=(50-1)^2=50^2-2\cdot 50+1=2401.$$

Формула (1), если ее читать справа налево, показывает, что многочлен $a^2-2ab+b^2$ можно представить как произведение двух одинаковых множителей $(a-b)$.

Замечание. Формулу (1) можно получить как следствие формулы (2) предыдущего пункта, заменив в ней всюду b на $-b$.

---

525. Запишите и прочитайте формулу квадрата разности.

526°. Является ли формула квадрата разности тождеством? Почему?

527. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида двумя способами:

а) $(a-b)^2$; б) $(x-3)^2$; в) $(1-m)^2$;
г) $(5+p)^2$; д) $(2a-3)^2$; е) $(4-3y)^2$;
ж) $(3m+2n)^2$; з) $(5p-2q)^2$.

528. Используя формулу квадрата суммы или разности, преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(a-b^2)^2$; б) $(x^3-y)^2$;
в) $(m^3-n^2)^2$; г) $(p^4+q^2)^2$;
д) $(a^3+ab)^2$; е) $(x^3-y^2z)^2$;
ж) $(2m-n^2)^2$; з) $(3p^2-2q^3)^2$;
и) $(4ab^2-3ab^2)^2$.

529. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $\left(\frac{1}{5}mn-m^3\right)^2$;　　б) $\left(-\frac{1}{2}+3bc\right)^2$;

в) $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}y^4\right)^2$;　　г) $\left(-1\frac{1}{2}p^2+\frac{2}{3}q\right)^2$;

д) $\left(1\frac{1}{3}ab^2-3a^2b\right)^2$;　　е) $\left(2m^3n^2-2\frac{1}{2}mn^3\right)^2$;

ж) $(0{,}1a+3a^2b)^2$;　　з) $(1{,}2xy+0{,}7x^2)^2$;

и) $(-0{,}5x^3y^2+0{,}3xy^5)^2$.

530. Используя рисунок 11, докажите формулу квадрата разности.

531. Примените формулу квадрата разности для вычисления:

а) 49^2;　б) 89^2;
в) 199^2;　г) 38^2;
д) 98^2;　е) 198^2.

532. Представьте многочлен в виде квадрата двучлена:

а) $a^2-2ab+b^2$;
б) $4x^2-4xy+y^2$;
в) $9m^2+6m+1$;
г) $25-30c+9c^2$;
д) $16p^2-56pq+49q^2$;
е) $100a^2+25b^2+100ab$;
ж) $x^4-6x^2y+9y^2$;
з) $16+9x^6-24x^3$.

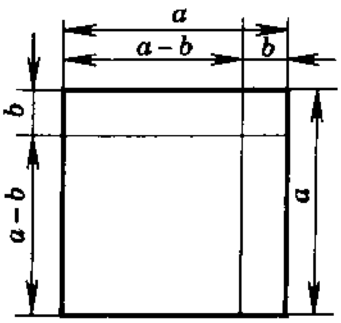


Рис. 11

533. Докажите алгебраическое равенство:

а) $(a-b)^2=(b-a)^2$;
б) $(-a-b)^2=(a+b)^2$.

534. Вместо букв C и D подберите одночлены так, чтобы выполнялось алгебраическое равенство:

а) $(a-C)^2=a^2-4a+4$;
б) $(C-y)^2=4x^2-D+y^2$;
в) $(C-D)^2=9m^2-12mn+4n^2$;
г) $(C+3q)^2=D+24pq+9q^2$.

535. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(m+n)^2+(m-n)^2$;
б) $2(a-1)^2+3(a-2)^2$;
в) $5(x-y)^2+(x-2y)^2$;
г) $4(m-2n)^2-3(3m+n)^2$;
д) $3(2a-b)^2-5(a-2b)^2$;
е) $4(3x+4y)^2-7(2x-3y)^2$;
ж) $2(p-3q)^2-4(2p-q)^2-(2q-3p)(p+q)$;
з) $5(n-5m)^2-6(2n-3m)^2-(3m-n)(7m-n)$;
и) $(x-y)^3$;　　к) $(2a-b)^3$.

536. Запишите в виде многочлена выражение:

а) $(x-2y)^2$; б) $(ab-c)^2$; в) $(5xy-2)^2$.

537. Выясните, является ли многочлен квадратом какого-либо двучлена:

а) $a^2-4ab+4b^2$; б) x^2-4x+4; в) a^4-2a^2+1.

6.3. Выделение полного квадрата

Пример 1. Рассмотрим многочлен второй степени относительно x:

$$x^2+6x+5.$$

Этот многочлен можно преобразовать следующим образом:

$$x^2+6x+5=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+5=(x+3)^2-4.$$

Мы представили $6x$ в виде удвоенного произведения x и 3, прибавили к многочлену и вычли из него одно и то же число 3^2, далее применили формулу квадрата суммы для двучлена $x+3$.

Итак, получено равенство

$$x^2+6x+5=(x+3)^2-4,$$

показывающее, что многочлен второй степени x^2+6x+5 равен сумме квадрата двучлена $(x+3)$ и числа -4. В этом случае говорят, что из многочлена x^2+6x+5 выделен **полный квадрат**.

Пример 2. Рассмотрим многочлен второй степени:

$$x^2-8x.$$

Проведем преобразования:

$$x^2-8x=x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2-4^2=(x-4)^2-16.$$

Мы представили $8x$ в виде удвоенного произведения x и 4, прибавили к многочлену и вычли из него одно и то же число 4^2, наконец применили формулу квадрата разности для двучлена $(x-4)$.

Итак, получено равенство:

$$x^2-8x=(x-4)^2-16,$$

показывающее, что многочлен второй степени x^2-8x равен сумме квадрата двучлена $x-4$ и числа -16. Итак, из многочлена x^2-8x выделен полный квадрат.

Аналогично рассуждая, можно выделить полный квадрат из любого многочлена второй степени относительно x с коэффициентом при x^2, равным 1, т. е. записать этот многочлен в виде суммы квадрата двучлена и числа. Приведем еще примеры выделения полного квадрата из многочлена второй степени.

Пример 3.

$$x^2+x+1=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Пример 4.

$$x^2-6x+9=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+9=(x-3)^2.$$

538°. Из любого ли многочлена второй степени с коэффициентом 1 при x^2 можно выделить полный квадрат?

539. Представьте выражение в виде степени с показателем 2:

а) 9; б) $16x^2$; в) $4a^2b^2$;
г) $25p^4$; д) $m^8n^6k^{10}$; е) $49a^4b^6c^{12}$.

540. Представьте выражение в виде двучлена:

а) 4; б) -5; в) $2x$;
г) $-3x$; д) $6a^2$; е) $-11bc$.

541. Представьте выражение в виде удвоенного произведения двух выражений:

а) $4xy$; б) $6ab$; в) $10m^2n$;
г) $8pq^4$; д) x; е) $-3ab$;
ж) $\frac{1}{2}mn$; з) $-0{,}3pq$; и) $-2{,}7c$.

542. Прибавьте к двучлену такой одночлен, чтобы полученный трехчлен являлся полным квадратом:

а) x^2+2x; б) a^2+4ab; в) m^2+1;
г) $9+6p$; д) $10y+25$; е) $16x^2+8xy$.

Выделите полный квадрат из многочлена (**543—544**):

543. а) a^2+2a+2; б) x^2-2x+3;
в) m^2-2m-1; г) $4+2q+q^2$;
д) x^2+6x+1; е) a^2-4a+1;
ж) m^2-6m+9; з) $16+8p+p^2$;
и) a^2-2a; к) x^2+6x;
л) $m+m^2+1$; м) $3+p^2-p$.

544. а) $-3a+3+a^2$; б) a^2-1+5a;
в) $m^2-2+11m$; г) $-q+q^2-7$;
д) $a^2+\frac{1}{2}a+4$; е) $x^2-\frac{1}{3}x-1$;
ж) m^2+1; з) $4+p^2$;
и) x^2-5x.

6.4. Разность квадратов

Рассмотрим произведение

$$(a+b)(a-b).$$

Применяя правило умножения многочленов и приведя подобные члены, получим:

$$(a+b)(a-b)=a^2+ba-ab-b^2=a^2-b^2.$$

На основании распределительного и переместительного законов для чисел эти равенства являются тождествами.

Итак, получено равенство:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b), \qquad (1)$$

которое называют **формулой разности квадратов**. Оно является тождеством и читается так: **разность квадратов двух чисел равна произведению суммы этих чисел на их разность**.

Формула (1) дает разложение многочлена a^2-b^2 на множители.

545. Запишите и прочитайте формулу разности квадратов.

546°. Является ли тождеством формула разности квадратов? Почему?

547. Представьте выражение в виде квадрата:

а) 49; б) 121; в) x^4;
г) a^6; д) $4x^2y^6$; е) $25m^2n^6$;
ж) $\frac{1}{4}p^2$; з) $0{,}25x^4$; и) $2\frac{1}{4}x^4q^2$.

548. Представьте выражение в виде многочлена двумя способами.

а) $(p+q)(p-q)$; б) $(a-b)(a+b)$;
в) $(c+d)(d-c)$; г) $(y-x)(x+y)$;
д) $(a-3)(3+a)$; е) $(2-b)(b+2)$;
ж) $(m+1)(m-1)$; з) $(7-n)(7+n)$.

549. Упростите выражение, используя формулу разности квадратов. Сначала представьте выражение в виде разности квадратов, затем упростите запись степени.

Например: $(3a-2b)(3a+2b)=(3a)^2-(2b)^2=9a^2-4b^2$.

а) $(x+2y)(x-2y)$;
б) $(2a+b)(2a-b)$;
в) $(3m-n)(3m+n)$;
г) $(p-7q)(7q+p)$;
д) $(2a-3b)(2a+3b)$;
е) $(5x+4y)(4y-5x)$;
ж) $(4p-1)(1+4p)$;
з) $(5m+8n)(8n-5m)$;
и) $(4y-7x)(7x+4y)$;
к) $(11a-13b)(11a+13b)$.

550. Разложите на множители многочлен:

а) $4a^2-1$; б) a^2-b^2;
в) $9x^4-4$; г) x^4-16.

551. Вычислите, используя формулу разности квадратов.

Например: $41\cdot 39=(40+1)(40-1)=40^2-1^2=$
$=1600-1=1599$.

а) $71\cdot 69$; б) $82\cdot 78$; в) $299\cdot 301$;
г) $498\cdot 502$; д) $3{,}01\cdot 2{,}99$; е) $10{,}2\cdot 9{,}8$.

552. Представьте выражение в виде разности квадратов:

а) x^4-1; б) $4a^2-4$; в) m^6-25;
г) $16y^2-49x^2$; д) $9p^4-16q^6$; е) $36m^2-16n^2$.

553. Разложите многочлен на множители:

а) a^2-b^2; б) y^2-x^2; в) $(2x)^2-1$;
г) $9-(3m)^2$; д) $16-p^4$; е) $25-a^6$;
ж) m^4-n^2; з) p^8-49; и) $1-x^4$;
к) a^4-b^4.

554. Вместо букв C и D подберите одночлены так, чтобы выполнялось алгебраическое равенство:

а) $(2a-C)(2a+b^2)=4a^2-b^4$;
б) $(C+D)(x^2-y)=x^4-y^2$;
в) $(3m-C)(D+2n)=9m^2-4n^2$;
г) $(C+5q)(5q+D)=25q^2-16p^4$.

555. Упростите выражение:

а) $a(a-b)+b(a+b)+(a-b)(a+b)$;
б) $(m-n)(n+m)-(m-n)^2+2n^2$;
в) $(c-d)^2-(c+d)(d-c)+2cd$;
г) $(2a+5b)(5a-2b)-3(a+2b)(a-2b)$;
д) $(p+6)^2-4(3-p)(3+p)$;
е) $-(2+m)^2+2(1+m)^2-2(1-m)(m+1)$;
ж) $(x+y)^2-(x-y)^2$;
з) $(m-n)^2-(m+n)^2$.

556. Докажите алгебраическое равенство:

а) $(a-b)^2+(a-b)(b+a)=2a(a-b)$;
б) $2(x+5)^2-2(5-x)(5+x)=4x(x+5)$;
в) $2(c-3)^2-4(1-c)(c+1)=6(c-1)^2+8$;
г) $3(m-4)(4+m)-3(2-m)^2=12(m-5)$.

557. *Старинная задача.* Я купил столько коробок с мылом, сколько было кусков в коробке. Сестра купила на 3 коробки меньше, чем я, но в каждой было на 3 куска больше, чем в купленных мной. У кого больше кусков и на сколько?

6.5. Сумма кубов

Применяя правило умножения многочленов и приводя подобные члены, имеем

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3=a^3+b^3.$$

Итак, доказано равенство

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2). \qquad (1)$$

Это равенство называют **формулой суммы кубов**. Оно является тождеством.

Многочлен a^2-ab+b^2 называют **неполным квадратом разности** a и b.

Формулу (1) читают так: **сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел на неполный квадрат их разности.**

Формула (1) дает разложение многочлена a^3+b^3 на множители.

---

558. Запишите неполный квадрат разности a и b.

559. Запишите и прочитайте формулу суммы кубов.

560°. Является ли тождеством формула суммы кубов? Почему?

561. Запишите:

а) куб a;
б) сумму x и y;
в) разность квадрата a и произведения a и b;
г) полный квадрат разности x и y;
д) неполный квадрат разности a и b;
е) сумму кубов m и n;
ж) произведение суммы x и y и разности квадрата и куба y.

562. Укажите полные и неполные квадраты суммы или разности выражения:

а) $a^2-5a+25$; б) x^2+2x+1;
в) $9-3m+m^2$; г) $49+14p+p^2$;
д) $4k^2+4k+1$; е) $4-4a+4a^2$;
ж) $x^2+6x+36$; з) $9-6y+y^2$;
и) $\frac{1}{4}n^2+n+1$.

563. Приведите выражение к виду многочлена двумя способами:

а) $(m+n)(m^2-mn+n^2)$;
б) $(q+p)(p^2-pq+q^2)$;
в) $(a+1)(a^2-a+1)$;
г) $(2+x)(4-2x+x^2)$;
д) $(p^2-4p+16)(p+4)$;
е) $(25-5m+m^2)(5+m)$.

564. Упростите выражение:

а) $(a^3+1)(a^6-a^3+1)$;
б) $(2+n^2)(n^4-2n^2+4)$;
в) $(x+y^2)(x^2-xy^2+y^4)$;
г) $(p^3+q^2)(q^4-p^3q^2+p^6)$;
д) $(a^4b^2-2a^2b+4)(2+a^2b)$;
е) $(9n^2-3nm+m^2)(m+3n)$;
ж) $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$;
з) $(a^4+1)(a^8-a^4+1)$;
и) $(4x^4y^2-6x^2ya+9a^2)(3a+2x^2y)$;
к) $(5p^3+2q^2)(4q^4-10p^3q^2+25p^6)$.

565. Представьте выражение в виде степени с показателем 3:
а) 125; б) 8; в) $27x^3$;
г) $64y^3$; д) m^3y^3; е) a^6b^3;
ж) x^3y^6; з) $\frac{1}{8}p^3$; и) $0{,}001c^6$.

566. Представьте выражение в виде суммы кубов:
а) x^3+8; б) $27+a^3$;
в) $1+m^6$; г) p^9+64;
д) x^6+8y^3; е) a^9+27b^3;
ж) $8m^6+n^9$; з) $64p^9+g^{12}$;
и) $\frac{1}{8}+x^6y^9$.

567. Разложите двучлен на множители:
а) m^3+n^3; б) a^3+1;
в) b^3+8; г) x^3+y^6;
д) p^6+q^6; е) m^6+n^{15};
ж) $27a^3+b^3$; з) x^3+64y^3;
и) c^6+125d^3; к) $8p^6+q^{12}$.

568. Подберите одночлены A, B и C так, чтобы выполнялось алгебраическое равенство:
а) $m^3+A=(m+B)(m^2-mn+n^2)$;
б) $(x+A)(x^2+5x+25)=x^3+B$;
в) $(2x+3y)(A-B+C)=8x^3+27y^3$;
г) $(4a+3b)(A-B+C)=64a^3+27b^3$.

569. Упростите выражение:
а) $(x+1)(x^2-x+1)-(x^2-1)x$;
б) $(a^3-b^3)(a^3+b^3)+(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$;
в) $(3+m)(m^2-3m+9)-m(m-2)^2$;
г) $(p^6-q^3)(p^6+q^3)-(p^8-p^4q^2+q^4)(p^4+q^2)$.

570. Докажите алгебраическое равенство:
а) $(a^3+1)(a-1)=(a^2-a+1)(a^2-1)$;
б) $m^3+1=m(m+1)+(1-m)(1-m^2)$;
в) $(a+2)(a^2-2a+4)-a(a-3)(3+a)=9a+8$;
г) $m(m+n)(m-n)-(n+m)(m^2-mn+n^2)=-n^2(m+n)$.
Объясните, почему оно также является тождеством.

6.6. Разность кубов

Найдем разность кубов одночленов a и b.
Проведя рассуждения, как в п. 6.5, получим

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2). \qquad (1)$$

Это равенство называют **формулой разности кубов**. Оно является тождеством.

Многочлен a^2+ab+b^2 называют **неполным квадратом суммы** a и b.

Формулу (1) читают так: **разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел на неполный квадрат их суммы.**

Формула (1) дает разложение многочлена a^3-b^3 на множители.

571°. Запишите неполный квадрат суммы a и b.

572. Запишите и прочитайте формулу разности кубов.

573. Является ли тождеством формула разности кубов?

574. Составьте разность кубов выражений:

а) 5 и x; б) ab и a; в) a^2 и $3b$; г) $2x^3$ и $4y$.

575. Запишите неполный квадрат суммы выражений:

а) m и 4; б) $\frac{1}{2}$ и x^2; в) $2a$ и $3b$; г) mc и m^3.

576. Является ли выражение полным (неполным) квадратом суммы или разности:

а) x^2+x+1; б) $4-4x+x^2$;
в) $a^2+6ab+9b^2$; г) $100-10x+x^2$;
д) $\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{2}m+1$; е) $4p+1+4p^2$;
ж) $0{,}25m^2-mn+n^2$; з) $4p^2+\frac{1}{16}q^2-pq$?

577. Приведите выражение к виду многочлена двумя способами:

а) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$;
б) $(5-a)(a^2+5a+25)$;
в) $(2m-5n)(4m^2+10mn+25n^2)$;
г) $(7p+q)(49p^2-7pq+q^2)$;
д) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}xy+\frac{1}{9}y^2\right)$;
е) $(0{,}1a-0{,}2b)(0{,}04b^2+0{,}02ab+0{,}01a^2)$.

578. Упростите выражение:

а) $(3p-10q)(100q^2+30pq+9p^2)$;
б) $(7m+2n)(4n^2-14mn+49m^2)$;
в) $(ab-3)(a^2b^2+3ab+9)$;
г) $(km-n^2)(k^2m^2+kmn^2+n^4)$;
д) $\left(4y^2-xy+\frac{1}{4}x^2\right)\left(\frac{1}{2}x+2y\right)$;
е) $(1{,}21q^2+0{,}22pq+0{,}04p^2)(0{,}2p-1{,}1q)$;
ж) $\left(\frac{1}{9}m^4+m^2nk+9n^2k^2\right)\left(\frac{1}{3}m^2-3nk\right)$;
з) $\left(1\frac{1}{2}a^3-0{,}5b^2\right)\left(2\frac{1}{4}a^6+\frac{3}{4}a^3b^2+0{,}25b^4\right)$.

579. Запишите выражение в виде степени с показателем 3:

а) -8; б) -125; в) $\frac{1}{27}$;
г) $-0{,}008$; д) $a^6b^9c^3$; е) $-x^3y^{12}z^6$;
ж) $64m^6n^9$; з) $-27p^{15}q^9$; и) $-125a^{18}b^3$.

580. Разложите двучлен на множители:

а) m^3-1; б) p^3-27q^3;

в) $125x^3-8y^3$; г) $64a^3+1000b^3$;

д) x^6-y^6; е) $m^{12}-64$;

ж) x^9-x^6; з) $c^6d^3-k^3$.

581. Вместо A, B и C подберите одночлены так, чтобы выполнялось алгебраическое равенство:

а) $x^3+A=(x+B)(x^2-4x+16)$;

б) $A-8c^6=(3a-B)(C+6ac^2+4c^4)$;

в) $B-125m^9=(A-5m^3)(a^2+5am^3+25m^6)$;

г) $64m^9+A=(4m^3+C)(16m^6-B+4a^8)$.

582. Упростите выражение:

а) $(x-1)(x^2+x+1)-(1+x)(1-x+x^2)$;

б) $(a^2-3)(a^4+3a^2+9)+a^4(1-a)(1+a)$;

в) $2p^2(2-p)(p^2+2p+4)-4(p-5)(5+p)$;

г) $n^5(2+n^2)(n^2-2)-(m-n^3)(m^2+mn^3+n^6)$.

583. Докажите алгебраическое равенство:

а) $(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)=a^6-b^6$;

б) $(a-1)(a-2)(a^2+a+1)(a^2+2a+4)=a^6-9a^3+8$.

6.7. Куб суммы

По свойству степени с натуральным показателем

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b).$$

Применяя теперь формулу квадрата суммы, правило умножения многочленов и приводя подобные члены, получаем

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$$
$$=a^3+2a^2b+b^2a+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Итак, доказано равенство

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \qquad (1)$$

которое называют **формулой куба суммы** и читают так: **куб суммы двух чисел равен кубу первого числа плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго плюс куб второго числа**.

Формула (1), если ее читать справа налево, показывает, что многочлен $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ можно разложить на множители, а именно на произведение трех одинаковых множителей $(a+b)$.

584. Запишите и прочитайте формулу куба суммы.

585°. Является ли тождеством формула куба суммы?

586. Запишите:

а) сумму a и b;

б) квадрат суммы a и b;
в) куб суммы a и b;
г) сумму квадратов a и b;
д) сумму кубов a и b;
е) удвоенное произведение a и b;
ж) утроенное произведение a и b;
з) утроенное произведение квадрата a и b;
и) утроенное произведение a и квадрата b.

Запишите выражение в виде многочлена (**587—588**):

587. а) $(x+y)^3$; б) $(x+1)^3$;
в) $(x+2)^3$; г) $(3+y)^3$.

588. а) $(a+b)^3$; б) $(a+4)^3$; в) $(2a+1)^3$;
г) $(2a+3b)^3$; д) $(x+3z)^3$; е) $(2b+3)^3$.

589. Запишите выражение в виде степени двучлена, если это возможно:
а) $a^2+2ab+b^2$;
б) $a^2-2ab+b^2$;
в) a^2-ab+b^2;
г) a^2+ab+b^2;
д) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
е) $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$.

590. Выясните, является ли многочлен кубом какого-либо двучлена:
а) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$;
б) a^3+3a^2+3a+1;
в) $27+27b+9b^2+b^3$.

591. Упростите выражение двумя способами:
а) $(x+3)^2-(x+2)^2$;
б) $(x+2)^3-(x+1)^3$.

6.8. Куб разности

Найдем куб разности одночленов a и b.
Рассуждая, как в п. 6.7, получим

$$(a-b)^3=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=$$
$$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$

т. е. получим равенство

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \qquad (1)$$

Это равенство называют **формулой куба разности** и читают так: **куб разности двух чисел равен кубу первого числа минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго минус куб второго числа.**

Переписав формулу (1) в виде

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3,$$

получим разложение многочлена $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ на множители.

592. Запишите и прочитайте формулу куба разности.

593°. Является ли тождеством формула куба разности?

594. Запишите:

а) разность a и b;
б) квадрат разности a и b;
в) разность квадратов a и b;
г) куб разности a и b;
д) разность кубов a и b.

Запишите выражение в виде многочлена **(595—596)**:

595. а) $(x-y)^3$;   б) $(x-1)^3$;
в) $(x-2)^3$;   г) $(x-3)^3$.

596. а) $(a+b)^3$;   б) $(a-b)^3$;
в) $(a+2)^3$;   г) $(a-2)^3$;
д) $(a+3)^3$;   е) $(a-3)^3$;
ж) $(a+4)^3$;   з) $(a-4)^3$;
и) $(2a+b)^3$;   к) $(a-2b)^3$;
л) $(3a+2b)^3$;   м) $(2a-3b)^3$.

597. Запишите выражение в виде степени двучлена, если это возможно:

а) $a^2-2ab+b^2$;
б) a^2+4a+4;
в) a^2-3a+9;
г) $a^2+5a+25$;
д) a^3+3a^2+3a+1;
е) a^3-3a^2+3a-1;
ж) $a^3+6a^2+12a+8$;
з) $a^3-6a^2+12a-8$.

598. Выясните, является ли многочлен кубом какого-либо двучлена:

а) $1-3x+3x^2-x^3$;
б) $a^3-6a^2+12a-8$;
в) $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$.

599. Упростите выражение двумя способами:

а) $(x+1)^3-(x-1)^3$;
б) $(x+2)^3+(x-2)^3$.

600. Как получить формулу куба разности из формулы куба суммы?

6.9. Применение формул сокращенного умножения

Формулы

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

называют **формулами сокращенного умножения**.

Они остаются справедливыми, если в них вместо a и b подставить любые целые выражения.

Например, выражение

$$(a+b+c+d)^2$$

можно рассматривать как квадрат суммы двух целых выражений $(a+b)$ и $(c+d)$, поэтому справедливы равенства:

$$(a+b+c+d)^2=((a+b)+(c+d))^2=$$
$$=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2ad+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

Таким образом, получена формула

$$(a+b+c+d)^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

Формулы сокращенного умножения часто применяются для упрощения выражений, например:

$$(a+1)(a-1)(a^4+a^2+1)+(a^2-a+1)(a+1)=$$
$$=(a^2-1)(a^4+a^2+1)+(a+1)(a^2-a+1)=$$
$$=(a^6-1)+(a^3+1)=a^6+a^3.$$

Здесь мы последовательно применили формулы разности квадратов, разности и суммы кубов. Отметим, что формулы сокращенного умножения применяются для разложения многочлена на множители. Мы расскажем об этом в следующем пункте.

601. Запишите известные вам формулы сокращенного умножения.

602°. Останутся ли верными формулы сокращенного умножения, если в них вместо букв a, b, ... подставить любые целые выражения?

603°. Для чего применяются формулы сокращенного умножения?

604. Запишите и упростите выражение $A-B-C+D$, если:

а) $A=7x,\ B=xy+4x,\ C=5x-xy,\ D=-8xy$;

б) $A=a^2+2b,\ B=3a^2-b,\ C=b-2a^2,\ D=2a^2-b$.

605. Упростите выражение:

а) $(a+1)^2-2(a+1)+1$;

б) $(m-n)^2+2n(m-n)+n^2$;

в) $(p-q)^2-2(p^2-q^2)+(p+q)^2$;

г) $(x+2y)^2+2(x^2-4y^2)+(2y-x)^2$.

606. Преобразуйте выражение в многочлен двумя способами:

а) $(x+y+z)(x+y-z)$;

б) $(x-y+z)(x-y-z)$;

в) $(x-y+z)(x+y+z)$;

г) $(x-y-z)(x+y-z)$;

д) $(x-y-z)(x+y+z)$;

е) $(-x-y-z)(x-y-z)$.

607. Преобразуйте в многочлен произведение:

а) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$;

б) $(a-b+c+d)(a-b-c-d)$;

в) $(a+b-c+d)(a+b+c+d)$;

г) $(a-b-c+d)(a-b+c-d)$.

608. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(1+x)(1-x)(1-x^2)$;

б) $(a-1)(1+a)(a^2+1)$;

в) $(m+n)(n-m)(m^2+n^2)$;

г) $(3-p)(p^2+9)(p+3)$;

д) $(x+2)(4-x^2)(x-2)$;

е) $(p+q)^2(p-q)^2$;

ж) $(a-b)(a-b)(a+b)(a+b)$;

з) $(5+m)(m-5)(m-5)(m+5)$.

609. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(a+1)(a+2)(a^2+4)(a^2+1)(a-2)(a-1)$;

б) $(a+b+c)(a+b-c)-2ab$;

в) $(a-b)(a+b)(b^2+a^2)(a^4+b^4)$;

г) $(a+b)^3-3ab(a+b)$;

д) $3ab(a-b)+(a-b)^3$;

е) $(a^2-2)(a^2+2)-(2-a^2)^2$.

610. Упростите произведение:

$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)$.

611. Упростите выражение:

а) $(5-a)(3-a)-(a-4)^2$;

б) $(x+3)^2+3(x-2)^2$;

в) $3(2-m)^2+2(2-m)^2$;

г) $5(2p-3)^2+2(5-2p)^2$;

д) $4(3-5a)^2-5(a-3)(2a-3)$;

е) $(a+1)^2+2(a+1)-3(a-1)(a+1)$;

ж) $3-2(5-x)(x-5)-2(5+x)^2$;
з) $(x-y-z)(x-y-z)-(x-y)^2$;
и) $(x+y+z)(x-y-z)-(x+y-z)(x-y+z)$;
к) $(x+y-z)(x-y+z)-(x+y+z)(x-y-z)$.

612. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $4(1-a)^2+3(a+1)^2$; б) $3(m-2)^2+5(m+1)$;
в) $(a-b)^2-(a+b)^2$; г) $(a+b)^2-(a-b)^2$;
д) $2(x-1)^2-3(x+1)^2$; е) $4(a-2b)^2-9(2a-b)^2$;
ж) $3(2-3m)^2-3(2-3m)(3m+2)$;
з) $2(1-5x)^2-2(5x+1)(1-5x)$.

Докажите алгебраическое равенство **(613—615)**:

613. а) $a^3+b^3+3ab(a+b)=(a+b)^3$;
б) $a^3-3ab(a-b)-b^3=(a-b)^3$.

614. а) $(1+x^6)(1-x^3)(x^3+1)=1-x^{12}$;
б) $(m-n)(m^2+n^2)(n+m)=m^4-n^4$.

615. а) $(m^2+1)(n^2+1)=(mn-1)^2+(n+m)^2$;
б) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$.

616. Докажите, что:

а) разность квадратов двух последовательных натуральных чисел является нечетным числом;

б) разность квадратов двух последовательных четных чисел делится на 4;

в) разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8.

617. а) Докажите, что если к произведению двух целых последовательных чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего числа.

б) Напишите сумму квадрата разности a и b и их учетверенного произведения.

в) Напишите разность квадрата суммы a и b и их учетверенного произведения.

618. Запишите выражение в виде степени двучлена:

а) $(a+b)^2-4ab$; б) $(a-b)^2+4ab$;
в) $(x+2y)^2-8xy$; г) $(x-3y)^2+12xy$.

619. *Задача Ибн Сины.* Если число, будучи разделено на 9, дает в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа, деленный на 9, дает в остатке 1. Докажите.

620. *Задача Пифагора.* Докажите, что всякое нечетное натуральное число, кроме 1, есть разность двух квадратов.

621. *Задача Диофанта.* Докажите, что произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, само представляется двумя способами в виде суммы двух квадратов:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2;$$
$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2.$$

6.10. Разложение многочлена на множители

Напомним, что разложить многочлен на множители — это значит преобразовать его в произведение двух или нескольких множителей.

Приведем некоторые способы разложения многочлена на множители.

1. *Вынесение за скобки общего множителя многочлена.*

Пример 1. Разложим на множители многочлен

$$2ab-3ac+a^2. \qquad (1)$$

Все члены многочлена (1) имеют общий множитель a. Вынося его за скобки, получим разложение многочлена (1) на множители:

$$2ab-3ac+a^2=a(2b-3c+a).$$

2. *Применение формул сокращенного умножения.*

Как уже отмечалось, сами формулы сокращенного умножения дают разложение на множители важных в математике многочленов.

Часто, прежде чем применить какую-либо формулу сокращенного умножения, многочлен надо преобразовать.

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$49x^4-16y^6. \qquad (2)$$

Так как $49x^4=(7x^2)^2$, а $16y^6=(4y^3)^2$, то многочлен (2) можно записать в виде разности квадратов выражений $7x^2$ и $4y^3$. Применяя затем формулу разности квадратов, получим разложение многочлена (2) на множители:

$$49x^4-16y^6=(7x^2)^2-(4y^3)^2=(7x^2+4y^3)(7x^2-4y^3).$$

3. *Выделение полного квадрата.*

Иногда многочлен можно разложить на множители, если сначала выделить полный квадрат (см. п. 6.3.), а затем воспользоваться формулой разности квадратов.

Пример 3.

$$x^2+2x-8=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2-8=(x+1)^2-9=$$
$$=(x+1)^2-3^2=((x+1)+3)((x+1)-3)=(x+4)(x-2).$$

Пример 4.

$$x^4-10x^2+9=(x^2)^2-2\cdot x^2\cdot 5+5^2-5^2+9=$$
$$=(x^2-5)^2-16=(x^2-5)^2-4^2=$$
$$=((x^2-5)+4)((x^2-5)-4)=(x^2-1)(x^2-9)=$$
$$=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3).$$

4. *Группировка членов многочлена.*

Этот способ применяется чаще всего в сочетании со способом вынесения за скобки общего множителя.

Пример 5. Разложим на множители многочлен

$$2ax+2ay+3bx+3by. \qquad (3)$$

Группируя первый и второй члены, а также третий и четвертый, многочлен (3) перепишем в виде:

$$2ax+2ay+3bx+3by=(2ax+2ay)+(3bx+3by).$$

Теперь в скобках записаны многочлены, каждый из которых имеет свой общий множитель. Вынося каждый из этих множителей за скобки, получим:

$$(2ax+2ay)+(3bx+3by)=2a(x+y)+3b(x+y).$$

Теперь, вынося за скобки общий множитель $(x+y)$, имеем:

$$2a(x+y)+3b(x+y)=(x+y)(2a+3b).$$

Итак, многочлен (3) разложен на множители:

$$2ax+2ay+3bx+3by=(x+y)(2a+3b).$$

Способ группировки часто применяется также в сочетании с формулами сокращенного умножения.

Пример 6. Разложим на множители многочлен

$$a^3+a^2-b^3-b^2. \qquad (4)$$

Группируя первый и третий члены, а также второй и четвертый и применяя затем формулы разности кубов и разности квадратов, получим:

$$a^3+a^2-b^3-b^2=(a^3-b^3)+(a^2-b^2)=$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2)+(a-b)(a+b).$$

Вынося теперь за скобки общий множитель $(a-b)$, получим разложение многочлена (4) на множители:

$$a^3+a^2-b^3-b^2=(a-b)(a^2+ab+b^2+a+b).$$

Отметим, что если бы мы сгруппировали члены многочлена (4) как-нибудь иначе, нам не удалось бы разложить его на множители. Это говорит о том, что способ группировки — трудный способ, требующий определенных навыков и смекалки.

5. *Применение различных способов разложения многочлена на множители.*

Часто для разложения многочлена на множители надо применить (может быть, неоднократно) несколько из рассмотренных выше способов.

Пример 7. Разложим на множители многочлен

$$a^4+a^2b+ab^3+2ab^2+b^3. \qquad (5)$$

Объединяя первый и третий члены, а также второй, четвертый и пятый, вынесем за скобки их общие множители:

$$a^4+a^2b+ab^3+2ab^2+b^3=(a^4+ab^3)+(a^2b+2ab^2+b^3)=$$
$$=a(a^3+b^3)+b(a^2+2ab+b^2).$$

Применяя формулы суммы кубов и квадрата суммы, получаем:

$$a(a^3+b^3)+b(a^2+2ab+b^2)=$$
$$=a(a+b)(a^2-ab+b^2)+b(a+b)^2.$$

Вынося за скобки общий множитель $(a+b)$, имеем:

$$a(a+b)(a^2-ab+b^2)+b(a+b)^2=$$
$$=(a+b)(a(a^2-ab+b^2)+b(a+b))=$$
$$=(a+b)(a^3-a^2b+ab^2+ab+b^2).$$

Итак, многочлен (5) разложен на множители:

$$a^4+a^2b+ab^3+2ab^2+b^3=(a+b)(a^3-a^2b+ab^2+ab+b^2).$$

В заключение отметим, что разложение многочлена на множители (мы имеем в виду множители, имеющие степень, большую нуля) — трудная, не всегда выполнимая задача. Существуют многочлены, которые вообще не разлагаются на множители, имеющие степень больше нуля. Таким, например, является многочлен a^2+b^2.

622°. Какие методы можно применять для разложения многочлена на множители?

623°. Разложите двучлен на множители:

а) x^2+2x; б) x^2+2; в) $4-8x^2$;
г) $4+6x^2$; д) $15+3x$; е) $14x^2+7x^4$;
ж) $-3+12x$; з) $8x^2+4x^3$.

624°. Верно ли выполнено разложение многочлена на множители:

а) $3x-12x^2=3x(1-4x)$;
б) $8ab+6a^2b^3=2ab(4+3ab^2)$;
в) $5m^3n^2-20mn^3=5mn^2(m^2-4n)$?

Назовите общий множитель многочлена и вынесите его за скобки (**625—626**):

625. а) $ax+xb$; б) $am-ank$;
в) x^2y+xy^2; г) $p^2q^3-p^3q$;
д) $a^2bc+ab^2c+abc^2$; е) $x^2y^2z^3-xy^3z^2+x^4y^3z^5$;
ж) $2mn^3-4m^2n-6m^2n^3$; з) $6p^4q^3+8p^2q^3-10p^3q^2$;
и) $a^2-4a^4+5a^5$; к) $3x^2-x^6+2x^8$.

626. а) $-\frac{1}{2}m^3+2m^2-m$;

б) $\frac{1}{3}pq^2+\frac{1}{6}pq-p^2q$;

в) $\frac{1}{3}x^2y^3+\frac{1}{4}x^3y^2+\frac{1}{12}x^3y^3$;

г) $0{,}2a^5b^3-1{,}2a^3b^4+0{,}7ab^3$;
д) $-0{,}12mn-1{,}02m^2-0{,}04m^2n$;
е) $\frac{1}{3}p^6q^7+0{,}5p^5q^8+1{,}1p^4q^9$.

627. Разложите многочлен на множители:
а) $16a^2bc^3-12ac^3+28b^2c^2-8abc^5$;
б) $12x^2yz+18xy^3z^2-27x^5z^6-24xy^4z^4$;
в) $0{,}25m^2n^2k-0{,}45m^3nk^2-1{,}5mn^3k^2-0{,}05m^5n^3k$;
г) $1{,}42x^2y^4z^3-2\frac{1}{2}xy^3z^2-0{,}2x^3y^2z+3\frac{1}{3}xy^3z^2$;
д) $\frac{1}{3}a^2bx^3-1\frac{1}{2}ab^2x^2+0{,}3a^2x^3-1{,}1a^5b^3x^4$.

628. В многочлене $3a^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a-\frac{1}{6}$ вынесите за скобки указанный множитель:
а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) -2.

629. Вместо букв C и D подберите одночлены так, чтобы выполнялось алгебраическое равенство:
а) $3a^2b-9a^3b^5=C(1-3ab^4)$;
б) $14m^3x^2+21m^5x^4=C(2mx+3m^3n^3)$;
в) $6x^2y^3-D=3x^2y(C-5x^4y^3)$;
г) $4m^3n^2+C=D(2m^2+3n^4)$.

630. Найдите среди многочленов такие, которые после разложения на множители будут иметь одинаковые множители — одночлены, содержащие буквы:
$6x^3y-3x^2y^2$; $3x^3y-6x^2y^2$;
$5x^2y^4-10xy^5$; $10x^2y^4-5xy^5$.

631. Представьте выражение в виде произведения:
а) $(a+b)a+(a+b)c=(a+b)(\ldots)$;
б) $(a+b)x-(a+b)y=(a+b)(\ldots)$;
в) $2(a+b)+(a+b)x=(a+b)(\ldots)$;
г) $x(a+b)-2(a+b)=(a+b)(\ldots)$;
д) $2x(a+b)+(a+b)=(a+b)(\ldots)$;
е) $(a+b)3x-2y(a+b)=(a+b)(\ldots)$.

632. Представьте выражение в виде произведения:
а) $a(m+n)+(2m+2n)$;
б) $(3x+3y)-(ax+ay)$;
в) $(ma-mb)+(a-b)$;
г) $(ap-aq)-(bp-bq)$;
д) $(3x-6y)-(2y-x)$;
е) $(ax-bx)+(3b-3a)$.

633. Разложите многочлен на множители:
а) $a(x+y)+x+y$;
б) $3(m-n)+bm-bn$;
в) $2ax-bx+2(b-2a)$;

г) $(mx-2m)-2a+ax$;
д) $14x-6y-(7ax-3ay)$;
е) $(10ak-18ab)-27cb+15ck$.

634. Вынесите за скобки общий множитель:
а) $(x+y)+a(x+y)-2(x+y)=(x+y)(\dots)$;
б) $m(a-b)-n(b-a)+(3a-3b)=(a-b)(\dots)$;
в) $(2m-6n)+(xm-3xn)-y(3n-m)=(m-3n)(\dots)$;
г) $(6x-15y)-(5y-2x)+(2ax-5ay)=(2x-5y)(\dots)$;
д) $(-am-bm)+(3a+3b)-(x^2a+x^2b)=(a+b)(\dots)$.

Разложите многочлен на множители (**635—638**):

635. а) $(x+y)+(x+y)^2+(x+y)^3$;
б) $(3a-9b)-(a-3b)^2+(12b-4a)$;
в) $(-2m-8n)-(am+4an)+(5bm+20bn)$;
г) $(4x-y)^2-(y-4x)-(20x-5y)$.

636. а) $9a^2-4$; б) $25x^2-1$;
в) $\frac{1}{4}m^2-16n^2$; г) $100a^2-0{,}25b^2$;
д) $x^{12}-y^2$; е) m^6-n^6;
ж) $2\frac{1}{4}-c^4$; з) $1\frac{9}{16}a^{10}-0{,}01b^2$;
и) x^4-y^4.

637. а) $4x^2-4x+1$; б) $9a^2+6a+1$;
в) $-m^2-2m-1$; г) $6n-n^2-9$;
д) $x^4-2x^2y+y^2$; е) $36a^4-12a^2b^2+b^4$;
ж) $\frac{1}{4}m^4-m^2n^3+n^6$; з) $0{,}01a^6+25b^4-a^3b^2$.

638. а) a^3-27; б) $27+8x^3$;
в) $8m^3-n^3$; г) $1+y^6$;
д) x^9-125; е) $64a^3+b^6$;
ж) $\frac{1}{8}-m^{12}$; з) $\frac{8}{27}+n^3$;
и) $0{,}125-27x^3$.

639. Вычислите, предварительно разложив выражение на множители:
а) 4^2-3^2; б) 24^2-23^2;
в) 17^2-3^2; г) 87^2-13^2;
д) $19^2+2\cdot19+1$; е) $37^2-2\cdot37\cdot7+49$;
ж) $46^2+16^2-46\cdot32$; з) $53^2+53\cdot34+17^2$.

640. Придумайте примеры на применение формул сокращенного умножения при вычислениях.

641. Преобразуйте данное целое выражение в произведение многочленов:
а) $(2m+n)(6m+2n)-(m-3n)(8n+16m)$;
б) $(x-1)(4x-6y)+(x+1)(18y-12x)$;

в) $(2a+1)(5a-15)+(30-10a)(a-2)$;
г) $2a(a+2)^2-3b(a+2)$;
д) $(x-2)^2(x-3)+(x-2)(x-3)^2$;
е) $3m(m+2n)-2n(m+2n)^2$;
ж) $(p+3q)^2(p-q)-(p+3q)(p-q)^2$.

642. Разложите выражение на множители, используя формулы сокращенного умножения:
а) $(a+b)^2-c^2$;
б) $(a-b)^2-c^2$;
в) $(x-y)^2-(x+y)^2$;
г) $(a+b)^2-(x+y)^2$;
д) $(2x-y)^2-(3x-2y)^2$;
е) $(m^2-4n)^2-(m^2-2n)^2$;
ж) $(a+b)^2+2(a+b)+1$;
з) $(x-2y)^2+4(x-2y)+4$;
и) $9a^2-6a(a+1)+(a+1)^2$;
к) $16m^2-8m(3-m)+(3-m)^2$.

Представьте целое выражение в виде произведения многочленов **(643—644)**:

643. а) $2a+2b+ax+bx$;
б) $ax-ay+3x-3y$;
в) $m^2-mn+am-an$;
г) $5a+5b-ax-bx$;
д) $ax-ya+x-y$;
е) $m^2-mn-2n+2m$;
ж) $a^3+5a^2+5a+25$;
з) $x^4-3x^3+3x^2-9x$.

644. а) $86x-43y+2ax-ay$;
б) $10by-25bx-6ay+15ax$;
в) $x^2+xy-xz-yz$;
г) $m^4+2-m-2m^3$;
д) $5a^2-5ab+5b^2-5ab$;
е) $y-y^2-y^3+y^4$;
ж) $b^3+b^2c-b^2d-bcd$;
з) $x^2y-z^2x+y^2x-yz^2$.

645. Разложите многочлен на множители, предварительно представив один из его членов в виде суммы:
а) x^2-3x+2; б) a^2-5a+4;
в) a^2-6a+5; г) x^2-3x-4;
д) $m^2-3mn+2n^2$; е) $m^2-7mn+6n^2$.

646. Разложите многочлен на множители, предварительно выделив полный квадрат:
а) $a^2+8a+15$; б) x^4+4b^4;
в) $x^2-2xy-3y^2$; г) $m^2+7m+10$;
д) p^2-5p+6; е) $3m^2+27m+54$;
ж) x^2+x-12; з) a^2+6a+8;
и) x^2-x-12.

647. Верно ли выполнено разложение многочлена на множители:
а) $a^3-8+6a^2-12a=(a^2+8a+4)(a-2)$;
б) $x^2+2xy+y^2-xc-yc=(x+y-c)(x+y)$?

648. Разложите на множители многочлен:
а) $ab+cb+ad+cd$;
б) $a^2-2ab+b^2-c^2$;
в) a^4-16b^4;
г) $a^2+2ab+ac+b^2+bc$;
д) $9y^2-6y+1-x^2$;
е) $x^4+4x^2-y^2+6y-5$.

649*. *Задача Софи Жермен.* Докажите, что при любых натуральных $a \neq 1$ каждое число вида a^4+4 является составным числом.

650. Разложите многочлен на множители:
а) x^4-3x^2+2;
б) $b^2c^2-4bc-b^2-c^2+1$;
в) $y^2-10y+25-4x^2$;
г) $(a+b)^3-a^3-b^3$;
д) $x^{16}-y^{16}$.

§ 7. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

Мы уже говорили, что сумма, разность и произведение двух многочленов равны многочлену. Теперь рассмотрим частное двух многочленов.

7.1. Алгебраические дроби и их свойства

Будем обозначать многочлены большими буквами латинского алфавита A, B, C, D, ... **Алгебраической дробью называют выражение $\frac{A}{B}$ — частное от деления многочлена A на ненулевой многочлен B.**

Многочлен A называют числителем алгебраической дроби $\frac{A}{B}$, а многочлен B — ее знаменателем.

Выражения $\frac{a}{a+1}$ и $\frac{a^2-b^2}{3}$ могут служить примерами алгебраических дробей. Заметим, что в числителе второй дроби стоит многочлен a^2-b^2, а в знаменателе число 3, которое можно рассматривать как многочлен.

Если многочлен A есть число a ($A=a$), а ненулевой многочлен B есть число b ($B=b$, $b \neq 0$), то частное $\frac{A}{B}$ есть число $\frac{a}{b}$:

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}.$$

Например, если $A=-5$, а $B=3$, то алгебраическая дробь $\frac{A}{B}$ есть число $\frac{-5}{3}$.

Алгебраические дроби обладают *свойствами*, выраженными следующими алгебраическими равенствами:

$$\frac{A}{1}=A, \tag{1}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C} \tag{2}$$

для любого ненулевого многочлена C,

$$-\frac{A}{B}=\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}. \tag{3}$$

Равенство (1) означает, что если многочлен разделить на 1, то получится тот же многочлен, т. е. всякий многочлен A можно рассматривать как алгебраическую дробь $\frac{A}{1}$.

Например, $x-2y=\frac{x-2y}{1}$.

Равенство (2) означает, что если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится равная ей алгебраическая дробь.

Свойство, выраженное равенством (2), называют **основным свойством алгебраической дроби.**

Переход от дроби $\frac{A}{B}$ к дроби $\frac{A\cdot C}{B\cdot C}$ называют **приведением дроби $\frac{A}{B}$ к новому знаменателю** $B\cdot C$.

Например, приведем дробь $\frac{x}{y}$ к знаменателю $3y$, а дробь $\frac{x+1}{x-1}$ — к знаменателю $(x-1)^2$.

$$^{3/}\frac{x}{y}=\frac{3\cdot x}{3\cdot y}=\frac{3x}{3y},$$

$$^{x-1/}\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}=\frac{x^2-1}{(x-1)^2}.$$

Равенство (2) можно записать и в обратном порядке:

$$\frac{A\cdot C}{B\cdot C}=\frac{A}{B}. \tag{2'}$$

Равенство (2′) означает, что **алгебраическую дробь можно сократить на ненулевой многочлен.** Например,

$$\frac{2x+x^2}{3x-x^2}=\frac{x(2+x)}{x(3-x)}=\frac{2+x}{3-x}, \quad \frac{x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}.$$

Равенство (3) означает, что если $\frac{A}{B}$ есть алгебраическая дробь, то выражение $\left(-\frac{A}{B}\right)$ также есть алгебраическая дробь, равная частному от деления многочлена $(-A)$ на многочлен B или многочлена A на многочлен $(-B)$. Например,

$$\frac{a-b}{c-a}=\frac{-(a-b)}{c-a}=\frac{-a+b}{c-a}$$

или

$$-\frac{a-b}{c-a}=\frac{a-b}{-(c-a)}=\frac{a-b}{-c+a}.$$

З а м е ч а н и е. Если буквы, входящие в многочлены A, B и C, заменить числами, то эти многочлены станут числовыми выражениями, равными некоторым числам a, b и c, для которых алгебраические равенства (1), (2), (3) превращаются в числовые равенства:

1. $\frac{a}{1}=a$ для любого числа a;
2. $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$ для любых чисел a, b, c $(b\neq 0,\ c\neq 0)$;
3. $\frac{a}{b}=-\frac{-a}{b}=-\frac{a}{-b}$ для любых чисел a и b $(b\neq 0)$.

Таким образом, алгебраические равенства (1), (2), (3) превращаются в верные числовые равенства при замене в них букв числами (при этом надо исключить те значения букв, при которых многочлены, стоящие в знаменателе, обращаются в нуль).

651°. Что называют алгебраической дробью; числителем, знаменателем алгебраической дроби? Приведите примеры.

652°. Сформулируйте основное свойство алгебраической дроби.

653. Является ли данное выражение алгебраической дробью:
а) $7a$; б) $x+y$;
в) $\frac{x-2ab}{x^2+y^2}$; г) $\frac{x}{3a}-7xy$?

654. Запишите три алгебраические дроби, используя данные выражения:
а) xy, $(a-b)$, $3mn^2$;
б) m^2-n^2, $-ab$, $4(x^2-y)$.

655. Преобразуйте дробь так, чтобы перед преобразованной дробью стоял знак, противоположный знаку, стоящему перед данной дробью:
а) $\frac{1-a}{a}$; б) $-\frac{x}{x-3}$; в) $\frac{x-y}{x+y}$; г) $\frac{a^2+1}{a-2}$;
д) $\frac{a+b}{a^2+b^2}$; е) $-\frac{1}{2x+3y}$; ж) $\frac{-a-b}{x+y}$; з) $-\frac{-x-y}{-a-b}$.

656. Приведите дроби:

а) $\frac{5}{36}$, $\frac{2}{x^2}$, $\frac{11}{3x}$, $\frac{7}{9x^2}$, $\frac{1}{4x}$ к знаменателю $36x^2$;

б) $\frac{1}{20y}$, $\frac{5}{x^2}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{11}{2x}$, $\frac{3}{5xy}$ к знаменателю $20x^2y$.

Сократите дробь **(657—658)**:

657. а) $\frac{4}{8}$; б) $\frac{8}{12}$; в) $\frac{45}{210}$; г) $\frac{25b}{924}$;

д) $\frac{2a}{6}$; е) $\frac{14a}{21ab}$; ж) $\frac{x^5}{x^7}$; з) $\frac{8m^3n}{12mn^2}$;

и) $\frac{24a^5b^6c}{36a^7b^4c}$; к) $\frac{48x^3y^4z^3}{56xy^5z^4}$.

658. а) $\frac{2(x+y)}{4ax}$; б) $\frac{a+b}{a+b}$;

в) $\frac{2(x-1)}{5(x-1)}$; г) $\frac{3a(a-b)^2}{6a(a-b)^2}$;

д) $\frac{4x(x-y)^3}{16x^2y(x-y)}$; е) $\frac{25m^2n(a-b)}{35mn^2(a-b)^2}$;

ж) $\frac{2p(p-q)(p^2+q^2)}{4q(p-q)(p^2+q^2)}$; з) $\frac{8a(a+b)^2(a-b)}{18a(a-b)(a+b)}$.

659. Подберите одночлен или многочлен A так, чтобы алгебраическое равенство было верным:

а) $\frac{4a}{6a^3}=\frac{2}{A}$; б) $\frac{12x^2y}{48xy}=\frac{x}{A}$;

в) $\frac{3a^2(x+y)}{12ab(x+y)}=\frac{A}{4b}$; г) $\frac{7mn(x-y)^2}{14(x-y)^3}=\frac{mn}{A}$.

Сократите дробь **(660—664)**:

660. а) $\frac{x-y}{y-x}$; б) $\frac{2(a-b)}{3(b-a)}$;

в) $\frac{4mn(m-n)}{2m(n-m)}$; г) $\frac{6a^2b^3(3-a)}{14ab^3(a-3)}$.

661. а) $\frac{2x+2y}{4}$; б) $\frac{3a+3b}{6a}$; в) $\frac{4m-4n}{8mn}$;

г) $\frac{12ab}{6a-6b}$; д) $\frac{2a-2b}{4a+4b}$; е) $\frac{6x+6y}{3x-3y}$.

662. а) $\frac{ax-bx}{cx+dx}$; б) $\frac{ac+bc}{mc+nc}$; в) $\frac{x^2}{x^2+xy}$;

г) $\frac{ab}{a-ab}$; д) $\frac{m^2n}{m^2n-mn^2}$; е) $\frac{ax-bx}{xy+x^2}$;

ж) $\frac{p^2-p}{ap-bp}$; з) $\frac{x^2-xy}{2xy+2x^2}$.

663. а) $\frac{3xy}{3x^2a-3x}$; б) $\frac{4m^2n}{6mn^2+8m^2n}$;

в) $\frac{3a^2+4ab}{9a^2b+12ab^2}$; г) $\frac{4xy-x^2}{4x^2y-x^3y}$;

д) $\frac{2mn-6m^2}{12m^2n-4mn^2}$; е) $\frac{16p^3q^3-24p^2q^4}{12p^2q^3-8p^3q^2}$.

664. а) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$; б) $\frac{x-1}{x^2-1}$; в) $\frac{m^2-n^2}{2m+2n}$; г) $\frac{xm+xn}{m^2-n^2}$;

д) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; е) $\frac{a^2-b^2}{b^2+2ab+a^2}$; ж) $\frac{n^2-m^2}{(n-m)^2}$;

з) $\frac{p-p^2}{p^2-1}$; и) $\frac{x+x^2}{x^3-x}$; к) $\frac{a^3-2a}{4-a^2}$.

665. Составьте дробь, которая сокращалась бы на:

а) 2; б) $3ab$; в) $a+5$;

г) $-7m$; д) $a(x-2y)$; е) p^2-q^2.

666. Сократите дробь:

а) $\frac{3m-3n}{m^3-n^3}$; б) $\frac{1-a^3}{1+a+a^2}$;

в) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$; г) $\frac{2p^2-2p+2}{p^3+1}$;

д) $\frac{a^2-4a+4}{a^2-4}$; е) $\frac{3x^2+6xy+3y^2}{12y^2-12x^2}$;

ж) $\frac{m^2-n^2}{n^3-m^3}$; з) $\frac{2p^3-2q^3}{4q^2-4p^2}$;

и) $\frac{6a^2-6b^2}{3a^3+3b^3}$; к) $\frac{(x^3-y^3)(x+y)}{x^2-y^2}$.

7.2. Приведение алгебраических дробей к общему знаменателю

Пользуясь основным свойством дроби, можно привести к общему знаменателю любые дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$. Причем в качестве общего знаменателя всегда можно взять произведение знаменателей данных дробей:

$$^{D/}\frac{A}{B}=\frac{A\cdot D}{B\cdot D}, \quad ^{B/}\frac{C}{D}=\frac{C\cdot B}{D\cdot B}.$$

Пример 1. Дроби $\frac{1}{x-1}$ и $\frac{1}{x+1}$ имеют общий знаменатель $(x-1)\cdot(x+1)=x^2-1$. Поэтому

$$^{x+1/}\frac{1}{x-1}=\frac{1\cdot(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+1}{x^2-1};$$

$$^{x-1/}\frac{1}{x+1}=\frac{1\cdot(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x^2-1}.$$

Но может случиться, что многочлены B и D имеют общий множитель R, т. е. $B=B_1\cdot R$, $D=D_1\cdot R$, где B_1 и D_1 — многочлены. Тогда в качестве общего знаменателя можно взять произведение $B_1\cdot D_1\cdot R$, которое содержит меньше множителей, чем произведение $B\cdot D$:

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{B_1\cdot R}=\frac{A\cdot D_1}{B_1\cdot D_1\cdot R} \text{ и } \frac{C}{D}=\frac{C}{D_1\cdot R}=\frac{C\cdot B_1}{B_1\cdot D_1\cdot R}.$$

Пример 2. Для дробей $\frac{1}{x^2-1}$ и $\frac{1}{(x-1)^2}$ в качестве общего знаменателя можно взять произведение знаменателей $(x^2-1)(x-1)^2$. Но если разложить знаменатели данных дробей на множители, то выяснится, что они имеют общий множитель $x-1$:

$$x^2-1=(x-1)\cdot(x+1);$$
$$(x-1)^2=(x-1)\cdot(x-1).$$

Теперь видно, что в качестве общего знаменателя двух данных дробей проще взять произведение

$$(x-1)(x+1)(x-1)=(x-1)^2(x+1).$$

$$^{x-1/}\frac{1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x^2-1)(x-1)}=\frac{x-1}{(x-1)^2\cdot(x+1)};$$

$$^{x+1/}\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x+1}{(x-1)^2\cdot(x+1)}.$$

Иногда для приведения двух дробей к общему знаменателю достаточно поменять знак знаменателя одной из данных дробей, изменив одновременно знак числителя или знак самой дроби.

Пример 3. Для приведения дробей $\frac{3}{x-1}$ и $\frac{x}{1-x}$ к общему знаменателю поменяем знак числителя и знаменателя второй дроби:

$$\frac{x}{1-x}=\frac{-x}{x-1}.$$

Заметим, что при приведении дробей к общему знаменателю бывает полезно разложить на множители знаменатели данных дробей.

667°. а) Верно ли, что любые две алгебраические дроби можно привести к общему знаменателю, равному произведению знаменателей данных дробей?

б) В каком случае общий знаменатель двух алгебраических дробей содержит меньше множителей, чем произведение знаменателей данных дробей?

Приведите к общему знаменателю дроби (**668—673**):

668. а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{5}$; б) $\frac{3}{4}$ и $\frac{6}{7}$;

в) $\frac{8}{9}$ и $\frac{5}{-9}$; г) $\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{-7}$;

д) $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{6}$; е) $\frac{13}{14}$ и $\frac{6}{7}$;

ж) $\frac{7}{9}$ и $\frac{5}{-3}$; з) $\frac{1}{5}$ и $\frac{3}{-10}$;

и) $\frac{3}{10}$ и $\frac{4}{15}$; к) $\frac{5}{12}$ и $\frac{1}{16}$;

л) $\frac{8}{14}$ и $\frac{5}{-21}$; м) $\frac{7}{24}$ и $\frac{1}{-18}$.

669. а) $\frac{x}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{x}{5}$ и $\frac{-3}{7}$;

в) $\frac{2x}{5}$ и $\frac{5}{-6}$; г) $\frac{2}{3}$ и $\frac{7x}{-4}$;

д) $\frac{5}{3x}$ и $\frac{7}{6}$; е) $\frac{11}{2x}$ и $\frac{3}{7}$;

ж) $\frac{4}{x}$ и $\frac{3}{-x}$; з) $\frac{1}{5x}$ и $\frac{13}{-10x}$.

670. а) $\frac{x}{x-2}$ и $\frac{1}{2-x}$; б) $\frac{x}{5+x}$ и $\frac{3}{x+5}$;

в) $\frac{4x}{x-1}$ и $\frac{2-7x}{1-x}$; г) $\frac{2x}{3x+6}$ и $\frac{5}{x+2}$;

д) $\frac{15}{2x-8}$ и $\frac{7}{x-4}$; е) $\frac{3-x}{5-x}$ и $\frac{5}{2x-10}$.

671. а) $\frac{x}{3x-x^2}$ и $\frac{4}{3-x}$; б) $\frac{1}{2+x}$ и $\frac{x-1}{x^2-4}$;

в) $\frac{3}{4+6x}$ и $\frac{5x}{9x+3}$; г) $\frac{5x}{3-x}$ и $\frac{2}{x^2-9}$.

672. а) $\frac{x}{4x+x^2}$ и $\frac{4}{3x+12}$; б) $\frac{13x}{25-x^2}$ и $\frac{x-1}{10+2x}$;

в) $\frac{x-3}{4-x^2}$ и $\frac{5x}{x^2-4}$; г) $\frac{2}{(x-3)^2}$ и $\frac{1+x}{x^2-9}$.

673. а) $\frac{3x}{x^2+4x+4}$ и $\frac{x-4}{5x+10}$; б) $\frac{1+x}{x^2+2x+4}$ и $\frac{x-1}{x^3-8}$;

в) $\frac{x}{9-3x+x^2}$ и $\frac{5}{x^3-27}$; г) $\frac{12}{(x-3)^2}$ и $\frac{2+x}{(3-x)^2}$.

7.3. Арифметические действия над алгебраическими дробями

Дроби с общим знаменателем $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{B}$ складывают и вычитают по правилам:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}, \qquad (1)$$

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{B}=\frac{A-C}{B}. \qquad (2)$$

Если же дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ имеют разные знаменатели, то их сначала приводят к общему знаменателю, а затем складывают или вычитают по правилам (1) и (2).

В качестве общего знаменателя всегда можно взять произведение $B \cdot D$, и тогда сложение и вычитание делают по формулам:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A \cdot D+B \cdot C}{B \cdot D}, \qquad (1')$$

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A \cdot D-B \cdot C}{B \cdot D}. \qquad (2')$$

Умножение и деление дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ производится по правилам:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}=\frac{A \cdot C}{B \cdot D}, \qquad (3)$$

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D}=\frac{A \cdot D}{B \cdot C}. \qquad (4)$$

В случае деления предполагается, что C (так же как B и D) ненулевой многочлен.

Примеры.

1) $\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x-1}=\frac{1+x}{x-1}$,

2) $\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}=1$,

3) $\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{2(x+2)+x(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+4}{x^2-4}$,

4) $\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x+3}=\frac{x(x+3)-3(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{x^2+9}{x^2-9}$,

5) $\frac{a-4}{a+3} \cdot \frac{a+3}{a}=\frac{(a-4)(a+3)}{(a+3) \cdot a}=\frac{a-4}{a}$,

6) $\frac{a-5}{a+7} : \frac{a-5}{8}=\frac{(a-5) \cdot 8}{(a+7)(a-5)}=\frac{8}{a+7}$,

7) $\frac{x^2}{x^3-y^3}-\frac{x-y/x}{x^2+xy+y^2}=\frac{x^2}{x^3-y^3}-\frac{x^2-xy}{x^3-y^3}=\frac{x^2-(x^2-xy)}{x^3-y^3}=\frac{xy}{x^3-y^3}$.

В примерах 3) и 4) знаменатели данных дробей разные и не имеют общих множителей. В качестве общего знаменателя этих дробей взято произведение их знаменателей. В примере 7) в качестве общего знаменателя взят многочлен x^3-y^3, делящийся на (x^2+xy+y^2).

З а м е ч а н и е. Если заменить числами буквы, входящие в многочлены A, B, C и D, то они станут числовыми выражениями, равными некоторым числам a, b, c и d. Если при этом окажется, что числа b и d отличны от нуля, то верны числовые равенства:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d},$$
$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d},$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Если, кроме чисел b и d, число c отлично от нуля, то будет справедливо числовое равенство:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Таким образом, алгебраические равенства (1′), (2′), (3) и (4) превращаются в верные числовые равенства при замене в них букв числами. При этом надо исключить те значения букв, при которых обращается в нуль хотя бы один из многочленов B и D, а для равенства (4) надо исключить те значения букв, при которых обращается в нуль хотя бы один из многочленов B, D и C.

Докажем *свойства*, вытекающие из правил действий над алгебраическими дробями.

1. Если B — ненулевой многочлен, то

$$\frac{0}{B}=0.$$

Действительно, можно заменить в числителе 0 на $0\cdot B$, а в знаменателе B на $1\cdot B$. Тогда, пользуясь основным свойством алгебраических дробей, можно сократить полученную дробь на ненулевой многочлен B. В результате получим число 0 (нулевой многочлен):

$$\frac{0}{B}=\frac{0\cdot B}{1\cdot B}=\frac{0}{1}=0.$$

Например, так как $3x-7$ — ненулевой многочлен, то

$$\frac{0}{3x-7}=0.$$

Аналогично, пользуясь еще и равенством $-\frac{A}{B}=\frac{-A}{B}$, можно доказать, что $-\frac{0}{B}=0$.

2. $\boldsymbol{\frac{1}{A\cdot B}=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}}$.

Действительно, $\frac{1}{A\cdot B}=\frac{1\cdot 1}{A\cdot B}=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}$.

3. $\boldsymbol{\frac{A}{B}=A\cdot\frac{1}{B}}$.

Действительно, $\frac{A}{B}=\frac{A\cdot 1}{1\cdot B}=\frac{A}{1}\cdot\frac{1}{B}=A\cdot\frac{1}{B}$.

В частности, если B — число, например 7, то

$$\frac{A}{7}=\frac{1}{7}\cdot A.$$

Следовательно, дробь $\frac{A}{7}$ можно рассматривать как многочлен $\frac{1}{7}\cdot A$. Конечно, в этом примере число 7 можно заменить на любое другое не равное нулю число.

4. $\boldsymbol{\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A}{B}+\left(-\frac{C}{D}\right)}$.

Действительно, $\frac{A}{B}+\left(-\frac{C}{D}\right)=\frac{A}{B}+\frac{-C}{D}=\frac{A\cdot D+B\cdot(-C)}{B\cdot D}=$
$=\frac{A\cdot D-B\cdot C}{B\cdot D}=\frac{A}{B}-\frac{C}{D}$.

5. $\boldsymbol{\frac{A}{B}-\frac{A}{B}=0}$.

Действительно, $\frac{A}{B}-\frac{A}{B}=\frac{A-A}{B}=\frac{0}{B}=0$.

674°. По каким правилам складывают, вычитают, умножают и делят алгебраические дроби?

675. Докажите равенство:

а) $\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A}{B}+\frac{C}{-D}$; б) $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A}{B}-\frac{C}{-D}$.

Выполните действия **(676—681)**:

676. а) $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}$; б) $\frac{a}{7}-\frac{b}{7}$; в) $\frac{2x}{5}-\frac{3y}{5}$;

г) $\frac{5m}{4}+\frac{3n}{4}$; д) $\frac{x}{4}+\frac{3x}{4}$; е) $\frac{7a}{8}-\frac{3a}{8}$;

ж) $\frac{2a^2}{5}-\frac{a^2}{5}$; з) $\frac{p^3}{4}-\frac{7p^3}{4}$.

677. а) $\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2}$; б) $\frac{2a}{3}-\frac{c-a}{3}$;

в) $\frac{a+b}{5}+\frac{a}{5}$; г) $\frac{x-y}{7}-\frac{y}{7}$;

д) $\frac{2+x}{3}+\frac{2x-8}{3}$; е) $\frac{a+1}{8}-\frac{2a}{8}$.

678. а) $\frac{1}{2}-\frac{x+1}{2}$; б) $\frac{m}{4}-\frac{m+4}{4}$;

в) $\frac{p+1}{6}-\frac{3+p}{6}$; г) $\frac{a+5}{5}-\frac{a-3}{5}$;

д) $\frac{2x-y}{7}-\frac{x-y}{7}$; е) $\frac{3m+n}{10}-\frac{5m+4n}{10}$.

679. а) $\frac{1}{a}+\frac{2}{a}$; б) $\frac{a}{x}+\frac{3}{x}$;

в) $\frac{a}{b}-\frac{2a}{b}$; г) $\frac{3x^2}{a}+\frac{2x^2}{a}$;

д) $\frac{x+4}{a}+\frac{2x}{a}$; е) $\frac{x+1}{x}-\frac{x+3}{x}$.

680. а) $\frac{3}{a+b}+\frac{5}{a+b}$; б) $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-1}$;

в) $\frac{a+3}{a+b}+\frac{a-3}{a+b}$; г) $\frac{m+1}{m+n}-\frac{3-m}{m+n}$;

д) $\frac{2x-4}{x-3}-\frac{3x+5}{x-3}$; е) $\frac{7p-1}{p+1}-\frac{7-p}{p+1}$.

681. а) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x}{1-x}$; б) $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{y-x}$;

в) $\frac{2a}{a-b}-\frac{3a}{b-a}$; г) $\frac{4m-1}{n-m}+\frac{m-4}{m-n}$;

д) $\frac{2p+q}{p-2q}+\frac{p+3q}{2q-p}$; е) $\frac{8a+b}{1-a}-\frac{2a-3b}{a-1}$.

682. Подберите одночлен A так, чтобы равенство было верным:

а) $\frac{2}{3}=\frac{A}{3}$; б) $\frac{7}{10}=\frac{28}{A}$;

в) $\frac{3}{8}=-\frac{A}{32}$; г) $-\frac{1}{5}=\frac{15}{A}$;

д) $\frac{5}{a}=\frac{A}{ab}$; е) $\frac{6x}{y}=\frac{A}{6xy^2}$;

ж) $-\frac{2a}{3b}=\frac{A}{3bx}$; з) $a=\frac{A}{b}$;

и) $\frac{ab}{2x}=-\frac{4abx}{A}$.

683. Подберите целое выражение B, чтобы равенство было верным:

а) $\frac{1}{2}=\frac{a+b}{B}$; б) $\frac{x}{3}=\frac{B}{3(x+y)}$;

в) $\frac{a}{3}=\frac{B}{6a+6}$; г) $\frac{a-b}{3}=\frac{a^2-b^2}{B}$;

д) $\frac{x}{a}=\frac{B}{a^2-a}$; е) $\frac{m-1}{m}=\frac{m^3-1}{B}$.

684. Упростите выражение:

а) $a+\frac{a}{2}$; б) $x-\frac{x}{3}$; в) $\frac{x}{7}-2x$;

г) $2+\frac{a}{3}$; д) $1+\frac{1}{a}$; е) $\frac{1}{b}-a$;

ж) $3x-\frac{a}{b+1}$; з) $\frac{a-1}{n-2}+2$; и) $2+\frac{2a}{1-2a}$.

Преобразуйте в алгебраическую дробь **(685—701)**:

685. а) $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$; б) $\frac{x}{5}-\frac{y}{2}$; в) $\frac{2m}{3}-\frac{4}{5}$;

г) $\frac{4m}{3}+\frac{2n}{5}$; д) $\frac{3p}{4}+\frac{2p}{3}$; е) $\frac{a^2}{4}-\frac{2a}{3}$;

ж) $\frac{7x^2}{3}+\frac{13x^2}{5}$; з) $\frac{6xy}{7}-\frac{5xy^2}{9}$.

686. а) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; б) $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}$; в) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$;

г) $\frac{5a}{7}-\frac{b}{x}$; д) $\frac{1}{2a}-\frac{1}{3}$; е) $\frac{1}{a}-\frac{1}{bc}$;

ж) $\frac{x}{y}-\frac{2}{3x}$; з) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y^2}$; и) $\frac{1}{ab}-\frac{2}{3x}$.

687. а) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}$; б) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$;

в) $\frac{1}{m+n}-\frac{1}{n}$; г) $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}$;

д) $\frac{2}{a-b}+\frac{3}{a+b}$; е) $\frac{4}{p-q}-\frac{3}{p+q}$;

ж) $\frac{2a}{a-2b}+\frac{3a}{a+b}$; з) $\frac{3x}{x-y}-\frac{2x}{2x-y}$;

и) $\frac{5m}{2m-n}-\frac{3m}{n-m}$; к) $\frac{4p}{q-2p}-\frac{2p}{2p+q}$.

688. а) $\frac{x}{8}-\frac{x}{4}$; б) $\frac{a}{6}+\frac{a}{8}$;

в) $\frac{m^2}{3}-\frac{2m}{2}$; г) $\frac{a-1}{10}+\frac{a}{15}$;

д) $\frac{2x+3}{6}+\frac{x-1}{8}$; е) $\frac{a-3}{10}-\frac{2-a}{15}$;

ж) $\frac{3m-n}{12}-\frac{4m-3n}{18}$; з) $\frac{p-2q}{12}-\frac{2p-q}{8}$.

689. а) $\frac{1}{4x}-\frac{1}{3x}$; б) $\frac{1}{m}+\frac{5}{4m}$; в) $\frac{2}{p}+\frac{3}{pq}$;

г) $\frac{a}{xy}-\frac{b}{x}$; д) $\frac{m}{n^2}-\frac{1}{mn}$; е) $\frac{a}{3b^2}+\frac{8}{2ab}$.

690. а) $\frac{m}{ab}+\frac{m}{ac}$; б) $\frac{2a}{mn}-\frac{5a}{mb}$;

в) $\frac{2a-3b}{m}+\frac{4a-5b^2}{mb}$; г) $\frac{x-y}{xy}-\frac{x-z}{xz}$.

691. а) $\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}$; б) $\frac{7}{m^4}-\frac{3a}{m^2}$;

в) $\frac{1}{a^5b^3}+\frac{1}{ab^7}$; г) $\frac{4}{x^4b^3}-\frac{3}{x^2b^5}$;

д) $\frac{3a}{x^7y^5z}-\frac{3b}{xy^4z^5}$; е) $\frac{m^7n}{a^4b^3c^9}+\frac{3mn^2}{a^3b^6c^4}$.

692. а) $\frac{2}{3a}+\frac{3}{2a^2}$; б) $\frac{m}{3xy^2}-\frac{n}{6x^2y}$;

в) $\frac{a}{6p^2q^3}+\frac{b}{8p^3q}$; г) $\frac{x}{15m^2n^4}-\frac{y}{10m^3n^7}$.

693. а) $\frac{1}{2a-2}+\frac{2}{4a-4}$; б) $\frac{7a}{3x+3}-\frac{a}{6x+6}$;

в) $\frac{2m}{4m+4n}+\frac{4n}{8m+8n}$; г) $\frac{2p}{10p-10q}-\frac{3q}{15p-15q}$;

д) $\frac{2x}{ax+bx}+\frac{3y}{ay+by}$; е) $\frac{y}{ax-bx}-\frac{x}{ay-by}$;

ж) $\frac{1}{2x^2y-xy}+\frac{2}{y-2xy}$; з) $\frac{3}{3m^2n-6mn^2}-\frac{2}{4mn-2m^2}$;

и) $\frac{15}{10p^3q-15p^2q^2}-\frac{6q}{9pq^3-6p^2q^2}$; к) $\frac{3b}{2a^3b-8a^2b^2}-\frac{5a}{12a^3b-3a^4}$.

694. а) $\frac{2a}{a^2-9}+\frac{3}{a-3}$; б) $\frac{5}{m+n}-\frac{4n}{m^2-n^2}$;

в) $\frac{x}{4-9x^2}+\frac{1}{3x-2}$; г) $\frac{1}{2p+4q}-\frac{q}{4q^2-p^2}$;

д) $\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{b}{a^3-b^3}$;

е) $\frac{m^2+n^2}{m^3+n^3}-\frac{1}{2(m+n)}$;

ж) $\frac{x^2-2xy}{(x-2y)^3}+\frac{1}{2y-x}$;

з) $\frac{2(p+q)}{p^3-q^3}+\frac{3}{q^2-p^2}$.

695. а) $3-\frac{7}{m-2}$; б) $1-\frac{x-y}{x+y}$;

в) $\frac{(a+b)^2}{b}-2a$; г) $\frac{(a-b)^2}{2a}+b$;

д) $a+b-\frac{a^2+b^2}{a-b}$; е) $\frac{a^2+b^2}{a+b}+a-b$.

696. а) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$; б) $\frac{x}{y}:\frac{a}{b}$; в) $\frac{4a}{7b}\cdot\frac{21}{a}$;

г) $\frac{5}{8}:\frac{15q}{16p}$; д) $\frac{5ax}{6by}\cdot\frac{3x}{5y}$; е) $\frac{7}{a}\cdot\frac{5ax}{14by}$;

ж) $\frac{8a^2y}{5bx}:\frac{3ay}{4b^2x}$; з) $\frac{25x^2y^3}{36ab}:\frac{35x^3y}{24b^2}$.

697. а) $a\cdot\frac{a}{b}$; б) $\frac{a}{x}:a$; в) $\frac{a}{7x}\cdot 5x$;

г) $ab:\frac{a}{b}$; д) $8a:\frac{20a^2b}{3x}$; е) $18p^3\cdot\frac{5x}{9p^2}$.

698. а) $\frac{a+1}{7x}\cdot\frac{2x}{a+1}$; б) $\frac{2m}{m-n}:\frac{3mn}{m-n}$;

в) $\frac{4p}{p-3}\cdot\frac{p-3}{2p^2}$; г) $\frac{x+y}{8a}:\frac{x+y}{16a^2b}$;

д) $\frac{2x+2y}{3}\cdot\frac{6}{x+y}$; е) $\frac{4a}{a^2b}:\frac{5ab}{3a-3b}$;

ж) $\frac{m-3n}{6m}\cdot\frac{3mn}{4m-12n}$; з) $\frac{2p-4q}{3p^2}:\frac{3p-6q}{4pq}$;

и) $\frac{ax-ay}{cd}\cdot\frac{cx+cy}{x-y}$; к) $\frac{mk}{am-an}:\frac{ka-k}{2m-2n}$.

699. а) $\frac{a^2-b^2}{2a^2b}\cdot\frac{4ab^2}{a+b}$; б) $\frac{(x-y)^2}{3x^2y^3}:\frac{x-y}{6xy^2}$;

в) $\frac{mn-m^2}{2m}\cdot\frac{8n}{n^2-m^2}$; г) $\frac{2a-4}{b+1}:\frac{a^2-4}{(b+1)^2}$;

д) $\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x^2-xy}{2x^2-2y^2}$; е) $\frac{16-m^2}{m^2-3m}:\frac{m^2+4m}{m^2-9}$.

700. а) $\frac{p^2-q^2}{p^2}\cdot\frac{pq+q^2}{(p+q)^2}$; б) $\frac{a^2-9b^2}{a^2-ab} : \frac{a^2+3ab}{a-b}$;

в) $\frac{3x^2-3y^2}{x^2+xy}\cdot\frac{x+y}{6x-6y}$; г) $\frac{m^2-n^2}{(m+n)^2} : \frac{4m-4n}{3m+3n}$.

701. а) $\frac{m^3+n^3}{2m}\cdot\frac{4mn}{m^2-mn+n^2}$; б) $\frac{2a}{a^3-b^3} : \frac{6ab}{a^2-b^2}$;

в) $\frac{m^3-n^3}{m^3+n^3} : \frac{(m-n)^2}{m^2-n^2}$; г) $\frac{x^2+xy}{6x^2-6y^2}\cdot\frac{3x^3+3y^3}{x^2-xy}$;

д) $\frac{p^2-4q^2}{(p+2q)^2} : \frac{p^3-8q^3}{4q^2-2pq+q^2}$; е) $\frac{12a^2+6ab}{8a^3-b^3}\cdot\frac{4a^2+2ab+b^2}{3a^2-6ab}$.

702. Упростите выражение: а) $\frac{0}{2x}$; б) $\frac{0}{m-n}$.

703. Решите уравнение:

а) $\frac{2x-3}{4}=0$; б) $\frac{5x+11}{7}=0$;

в) $\frac{7x-3}{5}=0$; г) $\frac{3x+4}{13}=0$.

704. Представьте алгебраическую дробь в виде произведения алгебраических дробей:

а) $\frac{1}{2x}$; б) $\frac{1}{a^2}$; в) $\frac{2}{m^2n^3}$;

г) $\frac{3}{(x-y)^2}$; д) $\frac{a}{a^2-b^2}$; е) $\frac{m}{m^3+n^3}$;

ж) $\frac{1}{p^3-p}$; з) $\frac{2}{2a^2+2ab}$.

705. Представьте алгебраическую дробь в виде многочлена:

а) $\frac{m}{5}$; б) $-\frac{a}{4}$; в) $\frac{2x}{7}$;

г) $-\frac{5y}{8}$; д) $\frac{x-1}{3}$; е) $\frac{2x-3}{2}$;

ж) $\frac{x^2-3x}{10}$; з) $\frac{m^2-mn+n^2}{8}$; и) $\frac{(a-1)\cdot 3}{5}$;

к) $\frac{(p-q)(p+4)}{4}$.

706. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{3}=2$; б) $\frac{x}{4}=\frac{2}{3}$;

в) $\frac{2x}{3}=5$; г) $\frac{4x}{7}=-1\frac{2}{5}$;

д) $\frac{x-1}{2}=1$; е) $-\frac{x+1}{2}+\frac{2x}{3}=0$;

ж) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=2$; з) $-\frac{2x}{3}+\frac{x}{4}-1=0$;

и) $\frac{x}{5}-2-\frac{2x}{7}=0$; к) $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{2}=19$.

7.4. Рациональные выражения

Рациональным выражением называют выражение, в котором несколько алгебраических дробей соединены знаками арифметических действий. Причем это выражение не содержит деления на нулевой многочлен.

Алгебраическая дробь также является рациональным выражением.

Приведем *примеры* рациональных выражений:

$$\frac{x+2}{(x-3)^3}+1;\quad \frac{a}{5}-5\cdot\frac{a(b-1)^3+\frac{1}{a}}{b+5\cdot\frac{b}{a}}.$$

Мы исключаем из рассмотрения, как не имеющие смысла, выражения, которые содержат деление на нулевой многочлен. Например, выражения

$$\frac{a+2}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}};\quad \frac{\frac{1}{a}}{c^3-c^3}\quad \text{и}\quad \frac{4+x^2+y^2}{4y^2-(y+y)^2}$$

не имеют смысла, так как содержат деление на нулевой многочлен.

Рациональные выражения можно упрощать, пользуясь правилами, которым подчинены алгебраические дроби. При этом надо учесть, что для рациональных выражений приняты те же правила порядка действий, что и для числовых выражений.

Пример 1. Упростим выражение

$$\frac{1+\frac{1}{a}}{\frac{6}{b}+\frac{3}{a}+\frac{3}{ab}}-\frac{\frac{ab}{3}}{2a+b+1}.$$

Сначала, применяя правила сложения алгебраических дробей, преобразуем числитель и знаменатель первой дроби:

1) $1+\frac{1}{a}=\frac{a}{a}+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a}$;

2) $\frac{6}{b}+\frac{3}{a}+\frac{3}{ab}=\frac{6a}{ab}+\frac{3b}{ab}+\frac{3}{ab}=\frac{6a+3b+3}{ab}$.

Теперь разделим числитель первой дроби на ее знаменатель и сократим полученную дробь:

3) $\frac{a+1}{a}:\frac{6a+3b+3}{ab}=\frac{(a+1)\cdot ab}{a\cdot(6a+3b+3)}=\frac{(a+1)b}{6a+3b+3}$.

Разделим числитель второй дроби на ее знаменатель:

4) $\frac{ab}{3}:(2a+b+1)=\frac{ab}{3(2a+b+1)}=\frac{ab}{6a+3b+3}$.

Теперь из результата третьего действия вычтем результат четвертого действия:

$$5)\ \frac{(a+1)b}{6a+3b+3}-\frac{ab}{6a+3b+3}=\frac{ab+b-ab}{6a+3b+3}=\frac{b}{6a+3b+3}.$$

Таким образом показано, что

$$\frac{1+\frac{1}{a}}{\frac{6}{b}+\frac{3}{a}+\frac{3}{ab}}-\frac{\frac{ab}{3}}{2a+b+1}=\frac{b}{6a+3b+3}.$$

Пример 2. Упростим выражение:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)((x-y)^2+xy)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)((x+y)^2-xy).$$

Выполним преобразование «цепочкой» равенств:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)((x-y)^2+xy)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)((x+y)^2-xy)=$$
$$=\frac{x+y}{xy}(x^2-xy+y^2)+\frac{y-x}{xy}(x^2+xy+y^2)=$$
$$=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy}+\frac{(y-x)(x^2+xy+y^2)}{xy}=$$
$$=\frac{x^3+y^3}{xy}+\frac{y^3-x^3}{xy}=\frac{x^3+y^3+y^3-x^3}{xy}=\frac{2y^3}{xy}=\frac{2y^2}{x}.$$

Пример 3. Упростим выражение:

$$\frac{a^2}{xy}+\frac{(a+x)^2}{x^2-xy}-\frac{(a+y)^2}{yx-y^2}=\frac{a^2}{xy}+\frac{(a+x)^2}{x(x-y)}-\frac{(a+y)^2}{y(x-y)}=$$
$$=\frac{a^2(x-y)+(a+x)^2y-(a+y)^2x}{xy(x-y)}=$$
$$=\frac{a^2x-a^2y+a^2y+2axy+x^2y-a^2x-2axy-xy^2}{xy(x-y)}=$$
$$=\frac{x^2y-xy^2}{xy(x-y)}=\frac{xy(x-y)}{xy(x-y)}=1.$$

707°. Что называют рациональным выражением?

708. Какие выражения не имеют смысла?

Упростите рациональное выражение **(709—714)**:

709. а) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc$; б) $5x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+3\right)$;

в) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\cdot\frac{ab}{c}$; г) $3x^3\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{y}+\frac{4}{x}\right)$.

710. а) $\left(\frac{a+x}{a}-\frac{x-y}{x}\right)\cdot\frac{a^2}{x^2+ay}$; б) $\left(\frac{a}{a-1}+1\right):\left(1-\frac{a}{a-1}\right)$;

в) $\left(m-\frac{1}{1+m}\right)\cdot\frac{m+1}{1-m-m^2}$; г) $\left(a+\frac{a^2}{c}\right):\left(b+\frac{bc}{a}\right)$;

д) $\left(\frac{a+x}{x}-\frac{2x}{x-a}\right):\left(\frac{a^2+x^2}{x-a}\right)$; е) $\left(\frac{x^2+1}{2x-1}-\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1-2x}{x+2}$;

ж) $\left(\frac{n}{n+x}-\frac{n}{n-x}\right):\left(\frac{n}{n-x}+\frac{n}{n+x}\right)$;

з) $\frac{3}{5x}-\frac{3}{x+y}\cdot\left(\frac{x+y}{5x}-x-y\right)$.

711. а) $\left(a^2-\frac{1}{b^2}\right):\left(a-\frac{1}{b}\right)$;

б) $\left(\frac{3a^2}{4b^2}-\frac{b^2}{3}\right):\left(\frac{3a}{2b}+b\right)$;

в) $\left(4x^2-\frac{1}{9b^2}\right):\left(2x-\frac{1}{3b}\right)$.

712. а) $\frac{x+y}{x}-\frac{x}{x-y}+\frac{y^2}{x^2-xy}$;

б) $\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m-2}-\frac{1}{m^2-4}$;

в) $\frac{3x^2+3xy}{4xy+6ay}\cdot\left(\frac{x}{ax+ay}+\frac{3}{2x+2y}\right)$;

г) $\left(\frac{c-d}{c^2+cd}-\frac{c}{d^2+cd}\right):\left(\frac{d^2}{c^3-cd^2}+\frac{1}{c+d}\right)$.

713. а) $\frac{a-1}{2a}\cdot\left(\frac{a+3}{a+1}-\frac{a^2-5}{a^2-1}\right)$; б) $\left(\frac{c+3}{c-3}-\frac{c}{c+3}\right)\cdot\frac{c-3}{c+1}$;

в) $\left(\frac{14+a^2}{a^2-4}-\frac{a-4}{a+2}\right)\cdot\frac{a-2}{6}$; г) $\left(\frac{a}{a-4}-\frac{a-4}{a+4}\right)\cdot\frac{a+4}{4}$;

д) $\left(\frac{y+1}{y-1}-\frac{y-1}{y+1}\right)\cdot\frac{y+1}{4y}$; е) $\left(\frac{1+a}{1-a}-\frac{1-a}{1+a}\right):\frac{2a}{1-a}$;

ж) $\frac{4y}{y-1}\cdot\left(\frac{y}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8y}\right)$; з) $\left(\frac{a}{8}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6a}\right):\frac{a+1}{12a}$.

714. а) $\frac{a^3-b^3}{a-b}\cdot\frac{a}{a^2+ab+b^2}-(a-b)$;

б) $\frac{ab}{a^2-b^2}:\frac{a+b}{a^2-b^2}+\frac{a^2}{a+b}$.

715. Какие из выражений не имеют смысла:

$$\frac{x-y}{x^2-y^2};\quad \frac{7-\frac{x-a}{a^2-2a^2+a^2}}{x^2+a^2};\quad \frac{a^2+b^2-2ab}{(x-5)^2-x^2-25+10x};\quad \frac{1}{a-\frac{1}{a}-\frac{a^2-1}{a}}?$$

7.5. Числовое значение рационального выражения

Рассмотрим для примера рациональное выражение

$$\frac{a^2+1}{a-1}+2a. \qquad (1)$$

Если подставить в него вместо буквы a число 3, то получим числовое выражение $\frac{3^2+1}{3-1}+2\cdot3=11$. Число 11 называют **числовым значением** или просто **значением выражения** (1) при $a=3$.

При $a=-1$ значение выражения (1) равно:

$$\frac{(-1)^2+1}{(-1)-1}+2\cdot(-1)=-3.$$

Подобным образом можно вычислить значение выражения (1) при любых значениях a, за исключением $a=1$. Ведь при $a=1$ выражение (1) не имеет смысла, так как содержит деление на нуль:

$$\frac{1^2+1}{1-1}+2\cdot1.$$

Говорят, что выражение (1) определено для всех числовых значений a, кроме $a=1$.

В качестве второго примера рассмотрим рациональное выражение

$$\frac{x^2+y^2}{x-y}. \qquad (2)$$

Зададим два числа. Первое из них подставим в выражение (2) вместо x, а второе — вместо y. Если при этом числовое значение знаменателя окажется не равным нулю, то получится числовое выражение, равное некоторому числу. Это число называется **числовым значением** или просто **значением дроби (2) при заданных числовых значениях** x и y. Мы видим, что дробь (2) имеет числовые значения для любых значений x и y, если только они отличны друг от друга.

Говорят, что дробь (2) определена для всех числовых значений x и y, отличных друг от друга ($x\neq y$).

Обратим внимание на то, что знаменатель дроби (2) есть ненулевой многочлен. Однако его значение при равных между собой значениях x и y обращается в нуль. Но имеется много пар числовых значений x и y, для которых знаменатель не обращается в нуль. Для каждой такой пары эта дробь имеет числовое значение, т. е. определена.

Подобным образом определяются числовые значения любых рациональных выражений.

Например, выражение

$$\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}-xyz$$

определено для всех числовых значений x, y и z, кроме $x=y=z=0$.

Выражение

$$\frac{1+\frac{d+a}{(c-d)^2}}{a^2+b^2+1}$$

определено для всех числовых значений a, b, c, d, кроме тех, для которых $c=d$.

Алгебраическая дробь $\frac{A}{B}$ определена для всех числовых значений входящих в нее букв, исключая те, для которых знаменатель B обращается в нуль.

Например, дробь

$$\frac{x-y-z-t}{2x-3y}$$

определена для всех числовых значений x, y, z и t, за исключением таких, для которых $2x-3y=0$.

716°. Что называют числовым значением рационального выражения?

717°. При каких числовых значениях букв алгебраическая дробь не определена?

718. Заполните таблицу, вычислив числовые значения выражений при данных значениях x:

x	0	-2	3	10^2	10^5	$-\frac{1}{2}$	0,6
$\frac{x}{x-1}$							
$\frac{x+1}{2x-3}$							

719. При каких числовых значениях a и b выражение $\frac{a}{b}$:

а) равно нулю; б) не имеет смысла?

720. При каких числовых значениях x обращается в нуль алгебраическая дробь:

а) $\frac{x-2}{5}$; б) $\frac{x+4}{x}$;

в) $\frac{2-x}{x+3}$; г) $\frac{2x+5}{3-x}$?

721. Запишите алгебраическую дробь, обращающуюся в нуль при x, равном:

а) 3; б) -2; в) $0{,}5$; г) $\frac{1}{3}$.

722. Найдите значения выражения при $x=0$, $x=-2$, $x=2^5$:

а) $\frac{x}{2}$; б) $\frac{10}{x}$; в) $\frac{2-3x}{7x}$; г) $\frac{x-2}{2+3x}$.

723. Заполните таблицу:

a	4	-10	6	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$-0{,}7$
b	2	20	-5	7	0	-2	$1{,}4$
$\frac{a}{b+a}$							

724. Найдите значения выражения:

а) $\frac{4-x^2}{2+x}$ при $x=1{,}04$;

б) $\frac{a^2b-ab^2}{a-b}$ при $a=2{,}5$, $b=\frac{1}{25}$;

в) $\frac{9m^2+6mn+n^2}{3m+n}$ при $m=\frac{1}{3}$, $n=-5$;

г) $\frac{a^3-p^3}{p-a}$ при $a=-\frac{1}{3}$, $p=-3$.

725. Упростите рациональное выражение, найдите его числовое значение:

а) $\left(\frac{a^2}{a+1}-\frac{a^3}{a^2+2a+1}\right):\left(\frac{a}{a+1}-\frac{a^2}{a^2-1}\right)$ при $a=-3$;

б) $\left(\frac{n-1}{n+1}-\frac{n+1}{n-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4}-\frac{1}{4n}\right)$ при $n=3$.

726. Укажите значение x, при котором числовое значение выражения:

а) x^2 будет наименьшим;

б) $\frac{1}{x^2+1}$ будет наибольшим.

727. Найдите числовое значение рационального выражения:

$\left(\frac{n}{a}+\frac{a^2}{n^2}\right):\left(\frac{1}{a^2n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{an^2}\right)-a^2n$ при $a=0{,}02$, $n=-10$.

728. При каких значениях букв определено выражение:

а) $\frac{a+b}{a}$; б) $\frac{1}{x-1}$;

в) $\frac{c}{c+3}$; г) $\frac{a-3}{2a-6}$?

729. Найдите, если это возможно, числовые значения x, обращающие алгебраическую дробь в натуральное число:

а) $\frac{12}{x+5}$; б) $\frac{x+2}{x}$;

в) $\frac{x+2}{x-5}$; г) $\frac{x^2-x}{x+1}$.

730. Заполните таблицу:

a	b	$\frac{a}{b}$	$a-\frac{1}{b}$	$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a-b}{a+b}$	$\frac{a^2-b^2}{a-2b}$
2	1					
-1	-3					
$\frac{1}{2}$	0,2					
0,4	$-\frac{1}{3}$					

731. Для каких числовых значений букв определено рациональное выражение:

а) $\frac{3}{x^2}$; б) $\frac{x}{x^2+y^2}$;

в) $\frac{xy-c}{m^2-n^2}$; г) $\frac{ab+c}{p^2-q^2}$?

732. Какие из данных алгебраических дробей ни при каких числовых значениях x не принимают целых значений:

$$\frac{1}{x};\ \frac{1-x}{1+x};\ \frac{1}{x^2+4};\ \frac{9}{x^3-1}?$$

733. При каких числовых значениях букв данные дроби равны нулю и при каких не определены:

$$\frac{3x}{x-2};\ \frac{m-38}{m};\ \frac{2p-8}{p-3};\ \frac{a+13}{2-3a}?$$

734. Найдите для каких числовых значений букв определено выражение:

а) $\frac{a+b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a}$; б) $\frac{xy-5}{x+y}\cdot\frac{x-y}{xy}$;

в) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{a-b}$.

735. Вычислите числовое значение выражения:

а) $\frac{a+b}{a^2-b^2}+a+\frac{b}{a}$ при $a=3,\ b=4$;

б) $\frac{ab}{a^2+b^2}-a^2$ при $a=-3,\ b=4$;

в) $\frac{xy-5}{x+y}\cdot\frac{x+y}{x-y}$ при $x=0,\ y=-3$.

736. Упростите выражение и вычислите его значение:

а) $\dfrac{3m^2+6mn+3n^2}{6n^2-6m^2}$ при $m=0{,}5$, $n=\dfrac{2}{3}$;

б) $\dfrac{2c^2-2b^2}{4b^2-8bc+4c^2}$ при $b=0{,}25$, $c=\dfrac{1}{3}$;

в) $\dfrac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\dfrac{1}{y^2-x^2}+\dfrac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$ при $x=0{,}35$, $y=7{,}65$;

г) $\dfrac{x^2+25}{(x-5)^3}+\dfrac{10x}{(5-x)^3}$ при $x=5{,}125$.

737. При каких целых значениях x значение дроби — целое число? Разберем решения для первых двух случаев, а остальные решите сами.

а) $\dfrac{3}{x}$. Решение. При $x=1, -1, 3, -3$ значение дроби — целое число.

б) $\dfrac{3x+5}{x+1}$. Решение. Разделим $3x+5$ на $x+1$ уголком:

$$\begin{array}{r|l} 3x+5 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{3x+3} & 3 \\ 2 & \end{array}$$

$\dfrac{3x+5}{x+1}=3+\dfrac{2}{x+1}$ — значение выражения целое число при $x=-3;\ -2;\ 0;\ 1$.

в) $\dfrac{5}{x}$; г) $\dfrac{3}{x-1}$;

д) $\dfrac{x+2}{x+1}$; е) $\dfrac{4x+9}{x+2}$.

7.6. Тождественное равенство рациональных выражений

В пп. 7.1.—7.5. рассмотрены алгебраические равенства рациональных выражений. Вот одно из таких алгебраических равенств:

$$\frac{a^2+a+1}{a-3}=\frac{(a^2+a+1)(a-1)}{(a-3)(a-1)}. \qquad (1)$$

Левая его часть определена для числовых значений a, отличных от 3. Правая же его часть определена для числовых значений a, отличных от 3 и 1. Но тогда равенство (1) определено для всех числовых значений a, отличных от 3 и 1. Более того, для каждого из этих значений a числовые значения левой и правой частей в алгебраическом равенстве (1) равны между собой.

Действительно, если заменить в равенстве (1) букву a любым числом, отличным от 3 и 1, то получим верное числовое равенство: ведь тогда его левая часть есть дробь, а правая — равная ей дробь, полученная умножением ее числителя и знаменателя на одно и то же не равное нулю число. Но такие числовые дроби равны.

Вот еще пример:

$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=\frac{x-3+x-2}{(x-2)(x-3)}=\frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}. \qquad (2)$$

Алгебраическое равенство (2) превращается в верное числовое равенство для всех числовых значений x, для которых определены левая и правая его части (т. е. для x, отличных от 2 и 3), потому что тогда оно выражает правило сложения числовых дробей.

Равенство двух рациональных выражений называют тождеством или тождественным равенством, если оно превращается в верное числовое равенство для всех числовых значений букв, для которых оба эти выражения определены.

Мы видели, что алгебраические равенства (1) и (2) — тождества. Подобными рассуждениями можно установить это свойство для любого алгебраического равенства.

Итак, **любое алгебраическое равенство есть тождество, т. е. оно превращается в верное числовое равенство для всех числовых значений букв, для которых оно определено.**

Замечание 1. Определение тождества, приведенное в этом пункте, не противоречит ранее данному определению тождественного равенства выражений, поскольку у любого целого выражения обе его части определены для всех числовых значений букв.

Замечание 2. На практике говорят, например, что алгебраическое равенство (2) есть тождество для всех x, отличных от 2 и 3.

738°. Какое равенство двух рациональных выражений называют тождеством?

739. Приведите пример алгебраического равенства для многочленов относительно одной буквы x. Для каких значений x это равенство есть тождество?

740. Приведите пример алгебраического равенства относительно x, левая часть которого определена для всех x, отличных от 0 и 1, а правая для всех x, отличных от 0.

741. При каких значениях букв данное алгебраическое равенство является тождеством:

а) $a+b=b+a$; б) $ab+ac=a(b+c)$;

в) $\frac{a}{b}=\frac{1}{b}\cdot a$; г) $\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$;

д) $\frac{(x+y)^2}{x+y}=x+y$; е) $x-y=\frac{x^2-y^2}{x+y}$;

ж) $\frac{m^3+m}{m^2+1}=m$; з) $m^2-m+1=\frac{m^3+1}{m+1}$;

и) $\frac{a+b}{a^2-b^2}=\frac{1}{a-b}$; к) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$?

§ 8. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

8.1. Понятие степени с целым показателем

Мы знаем, что степенью действительного числа a с натуральным показателем n называют число a^n, определяемое по правилу

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}}.$$

При этом, если $n=1$, считается, что правая часть этого равенства равна a:

$$a^1=a.$$

В п. 3.4 приведен ряд свойств степеней чисел с натуральным показателем, в частности свойство умножения степеней: если a — действительное число, а m и n — натуральные числа, то

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

Выясним теперь, как делятся натуральные степени одного и того же числа a. При этом придется считать, что a отлично от нуля ($a\neq 0$), потому что на нуль делить нельзя.

Пусть a — действительное, отличное от нуля число, а m и n — натуральные числа. Рассмотрим частное от деления a^m на a^n:

$$a^m:a^n=\frac{a^m}{a^n}.$$

Применим к этой дроби основное свойство дробей. Рассмотрим три случая: 1) $m>n$; 2) $m<n$; 3) $m=n$.

1) Если $m>n$, то

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^{m-n}\cdot a^n}{a^n}=a^{m-n}. \qquad (1)$$

Мы приходим к правилу: если число $a\neq 0$, m и n — натуральные числа и $m>n$, то

$$a^m:a^n=a^{m-n}.$$

2) Пусть теперь будет $m<n$. Рассмотрим пример. Пусть $m=3$, $n=5$. Тогда

$$a^3:a^5=\frac{a^3}{a^5}=\frac{1\cdot a^3}{a^2\cdot a^3}=\frac{1}{a^2}.$$

Мы видим, что при $m<n$ правило 1 неприменимо. Однако если условиться дробь $\frac{1}{a^2}$ обозначать через a^{-2}, т. е. считать, что $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$, то получим равенство

$$a^3:a^5=a^{-2}=a^{3-5},$$

которое можно рассматривать как частный случай равенства (1), но без ограничения $m>n$.

Вот еще пример:

$$a^7:a^{10}=\frac{a^7}{a^{10}}=\frac{1}{a^3}.$$

Если обозначить дробь $\frac{1}{a^3}$ через a^{-3}, то получим равенство

$$a^7:a^{10}=a^{-3}=a^{7-10},$$

которое также можно рассматривать как частный случай равенства (1), но без ограничения $m>n$.

В общем случае если $m<n$ и $a\neq 0$, то

$$a^m:a^n=\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}=a^{-(n-m)}=a^{m-n}.$$

Здесь дробь $\frac{1}{a^{n-m}}$ обозначена через $a^{-(n-m)}$.

3) Рассмотрим теперь третий случай $m=n$. Тогда

$$a^m:a^n=a^m:a^m=\frac{a^m}{a^m}=1.$$

Это равенство показывает, что целесообразно a^0 $(a\neq 0)$ считать равным единице, и тогда получим равенство

$$a^m:a^m=1=a^0=a^{m-m},$$

которое также можно рассматривать как частный случай равенства (1), но без ограничения $m>n$.

Приведенные выше рассуждения показывают, что целесообразно ввести следующие два соглашения:

1. Для любого действительного, отличного от нуля числа a и любого натурального числа m число $\frac{1}{a^m}$ условимся обозначать a^{-m} и писать:

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}\quad (a\neq 0).$$

Это равенство читают так: «a в степени $-m$ равно единице, деленной на a в степени m».

2. Для любого действительного, отличного от нуля числа a условимся под выражением a^0 понимать число 1 и писать:

$$a^0=1 \quad (a\neq 0).$$

Это равенство читают так: «a в степени нуль равно единице».

Итак, теперь определено, что такое a^m, где $a\neq 0$ и m — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль). Именно если a — любое действительное, отличное от нуля число, то

$$a^m=\begin{cases} \underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ \text{раз}}, & \text{если } m \text{ — натуральное число,}\\ 1, & \text{если } m=0,\\ \dfrac{1}{a^{-m}}, & \text{если } m \text{ — целое отрицательное число.}\end{cases}$$

При этом число a^m называют *степенью с целым показателем*, число a — *основанием степени*, число m — *показателем степени*.

Замечание. Выражение 0^0 считается лишенным смысла. Если m — натуральное число, то выражение 0^{-m} также считается лишенным смысла, однако

$$0^m=\underbrace{0\cdot 0\cdot\ldots\cdot 0}_{m\ \text{раз}}=0.$$

742°. а) Что понимают под a^0, если число $a\neq 0$?

б) Что понимают под a^{-m}, если число $a\neq 0$ и m — натуральное число?

в) Что называют степенью с целым показателем?

г) Имеет ли смысл выражение: 0^5; 0^0; 0^{-5}?

Вычислите (**743—744**):

743. а) 5^0; б) $\left(-\frac{1}{3}\right)^0$; в) $(-1{,}2)^0$; г) $(-1)^0$.

744. а) $\frac{2^4}{2^3}$; б) $\frac{2^4}{2^4}$; в) $\frac{2^4}{2^5}$; г) $\frac{2^5}{2^7}$;

д) $\frac{3^5}{3^4}$; е) $\frac{3^{100}}{3^{100}}$; ж) $\frac{(-0{,}3)^4}{(-0{,}3)^5}$; з) $\frac{0{,}2^7}{0{,}2^5}$.

745. Определите, имеет ли смысл выражение. Если да, то вычислите его значение:

а) $\left(0{,}25\cdot 79-3{,}21\cdot 2\frac{1}{11}\right)^0$; б) $(0{,}48\cdot 5{,}2-4{,}8\cdot 0{,}52)^0$.

746. Запишите в виде степени с целым показателем:

а) $2\cdot 2\cdot 2$; б) $2^3\cdot 2^5$; в) $\frac{1}{3^2}$;

г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{1}{3\cdot3\cdot3\cdot3}$; е) 5;

ж) $\frac{1}{16}$; з) $\frac{1}{25}$; и) $2^3:2^3$;

к) $\frac{9^7}{9^5}$; л) $\frac{0{,}5^6}{0{,}5^7}$; м) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3:\left(-\frac{1}{5}\right)^7$.

Вычислите **(747—749)**:

747. а) 10^4; 10^3; 10^2; 10^1; 10^0; 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4};
б) 2^5; 2^4; 2^3; 2^2; 2^1; 2^0; 2^{-1}; 2^{-2}; 2^{-3}; 2^{-4}; 2^{-5};
в) $(-3)^3$; $(-3)^2$; $(-3)^1$; $(-3)^0$; $(-3)^{-1}$; $(-3)^{-2}$; $(-3)^{-3}$.

748. а) 1^{-1}; -1^1; $(-1)^1$; $(-1)^{-1}$; -1^{-1};
б) 1^{-2}; -1^2; $(-1)^2$; $(-1)^{-2}$; -1^{-2};
в) 2^{-2}; -2^2; $(-2)^2$; $(-2)^{-2}$; -2^{-2}.

749. а) 4^{-2}; б) 3^{-1}; в) 3^{-4};
г) $7{,}12^0$; д) $5^{-1}+4^{-1}$; е) $(5+4)^{-1}$;
ж) $4^{-1}-5^{-1}$; з) $(3^{-1}-5^{-1})^{-2}$; и) $2^{-3}+4^{-2}$;
к) $3^{-2}-9^{-1}$; л) $4^2\cdot2^{-3}$; м) $3^{-4}:9^{-2}$.

750. Проверьте равенство:
а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{1}\right)^3$; в) $\left(\frac{12}{31}\right)^{-5}=\left(\frac{31}{12}\right)^5$.

751. Докажите, что для чисел $a\neq0$, $b\neq0$, k — целого верно равенство:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-k}=\left(\frac{b}{a}\right)^k.$$

Сравните **(752—753)**:

752. а) 5^0 и $(-5)^0$; б) 5^{-2} и 5^2;
в) $(-2)^3$ и $(-2)^0$; г) -3^2 и $(-3)^2$;
д) $(-2)^4$ и 2^{-4}; е) -2^4 и 2^{-4}.

753*. а) 19^{-20} и $\left(\frac{1}{19}\right)^{20}$;
б) 1999^{2000} и $\left(\frac{1}{1999}\right)^{-2000}$.

754. Сравните с нулем:
а) 2^{-3}; б) $(-2)^3$; в) $(-2)^{-3}$; г) -2^3;
д) 2^{-4}; е) $(-2)^4$; ж) $(-2)^{-4}$; з) -2^4.

Запишите в виде степени с целым показателем, если число $a\neq0$ **(755—756)**:

755. а) $a^3\cdot a^4$; б) $a^4\cdot a$; в) $a^{13}:a^6$;
г) $a^{12}:a$; д) $(a^4)^6$; е) $(a^2)^5$;
ж) $a^7\cdot b^7$; з) $a^4\cdot b^4$.

756. а) $a^5:a^6$; б) $a^7:a^6$; в) $a^4:a$;
г) $a^{12}:a^{12}$; д) $a^{-4}:a^6$; е) $a^4:a^{-5}$;

ж) $a^{-11}:a^{-8}$; з) $a^{-4}:a$; и) $a^0:a^5$;
к) $a^9:a^0$; л) $a^{-3}:a^0$; м) $a^0:a^{-8}$.

8.2. Свойства степени с целым показателем

Пусть a и b — произвольные, отличные от нуля действительные числа, m и n — произвольные целые числа. Тогда справедливы следующие равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad (1)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}; \qquad (2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}; \qquad (3)$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m; \qquad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}. \qquad (5)$$

Равенство (1) означает, что *при умножении степеней одного и того же числа показатели степеней складываются.*

Равенство (2) означает, что *при делении степеней одного и того же числа показатели степеней вычитаются*; точнее, из показателя степени числителя вычитается показатель степени знаменателя.

В справедливости этих утверждений можно убедиться на примерах. Два таких примера, когда $m=3$, $n=5$ и $m=7$, $n=10$, были уже рассмотрены в предыдущем пункте.

Вот еще примеры ($a \neq 0$ и $b \neq 0$):

1) $a^{-3} \cdot a^2 = \frac{1}{a^3} \cdot a^2 = \frac{1}{a} = a^{-1} = a^{-3+2}$;

2) $a^{-6} \cdot a^{-7} = \frac{1}{a^6} \cdot \frac{1}{a^7} = \frac{1}{a^{13}} = a^{-13} = a^{-6+(-7)}$;

3) $\frac{a^{-3}}{a^{-2}} = \frac{\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{a^2}} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a} = a^{-1} = a^{-3-(-2)}$;

4) $\frac{a^5}{a^{-2}} = \frac{a^5}{\frac{1}{a^2}} = \frac{a^5 \cdot a^2}{1} = a^7 = a^{5-(-2)}$;

5) $\frac{a^0}{a^5} = \frac{1}{a^5} = a^{-5} = a^{0-5}$.

Равенство (3) означает, что *при возведении степени числа в степень показатели степеней перемножаются.*

При натуральных m и n это правило хорошо известно. В справедливости же его при любых m и n можно убедиться на следующих примерах ($a \neq 0$):

6) $(a^{-3})^2 = \left(\frac{1}{a^3}\right)^2 = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^3 \cdot a^3} = \frac{1}{a^6} = a^{-6} = a^{-3 \cdot 2}$;

7) $(a^{-4})^0 = 1 = a^0 = a^{-4 \cdot 0}$;

8) $(a^{-2})^{-3}=\left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^3}=\frac{1}{\frac{1}{a^6}}=a^6=a^{-2\cdot(-3)}$.

Равенство (4) означает, что *степень произведения двух чисел равна произведению тех же степеней этих чисел.*

Равенство (5) означает, что *степень частного двух чисел равна частному тех же степеней этих чисел.*

В справедливости этих утверждений можно убедиться на следующих примерах ($a\neq 0$, $b\neq 0$):

9) $(a\cdot b)^{-3}=\frac{1}{(a\cdot b)^3}=\frac{1}{a^3\cdot b^3}=\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{b^3}=a^{-3}\cdot b^{-3}$;

10) $\left(\frac{a}{b}\right)^0=1=\frac{1}{1}=\frac{a^0}{b^0}$;

11) $\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b}=\frac{a^3}{b^3}$.

В каждом из примеров 1) — 11) были проведены все необходимые выкладки. Но, после того как правила (1) — (5) будут усвоены, промежуточные выкладки можно опускать, ссылаясь на эти правила. Таким образом, если $a\neq 0$ и $b\neq 0$, то:

1) $a^{-3}\cdot a^2=a^{-3+2}=a^{-1}$; 2) $a^{-6}\cdot a^{-7}=a^{-6+(-7)}=a^{-13}$;

3) $\frac{a^{-3}}{a^{-2}}=a^{-3-(-2)}=a^{-1}$; 4) $\frac{a^5}{a^{-2}}=a^{5-(-2)}=a^7$;

5) $\frac{a^0}{a^5}=a^{0-5}=a^{-5}$; 6) $(a^{-3})^2=a^{-3\cdot 2}=a^{-6}$;

7) $(a^{-4})^0=a^{-4\cdot 0}=a^0=1$; 8) $(a^{-2})^{-3}=a^{-2\cdot(-3)}=a^6$;

9) $(a\cdot b)^{-3}=a^{-3}\cdot b^{-3}$; 10) $\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$;

11) $\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a^3}{b^3}$.

757°. а) По какому правилу умножают степени с целыми показателями одного и того же числа?

б) По какому правилу делят степени с целыми показателями одного и того же числа?

в) По какому правилу возводят в степень с целым показателем степень числа?

г) По какому правилу находят степень с целым показателем произведения двух чисел?

д) По какому правилу находят степень с целым показателем частного двух чисел?

758. Представьте в виде степени с целым показателем:

а) $a^{-3}\cdot b^{-3}$; б) $7^2\cdot 2^{-3}\cdot 7$.

759. Представьте выражение в виде произведения степеней:

а) $(a^2b^{-5})^3$; б) $(a^{-7}b^2)^{-2}$; в) $(a^{-3}b^{-5})^{-4}$.

760. Докажите, что если число $a \neq 0$ и m, n, k — целые числа, то:

а) $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$; б) $a^m \cdot a^n \cdot a^k = a^{m+n+k}$;

в) $((a^m)^n)^k = a^{m \cdot n \cdot k}$.

Запишите в виде степени с целым показателем, если число $a \neq 0$ **(761—765)**:

761. а) $2^3 \cdot 2^4$; б) $5 \cdot 5^6$;

в) $4^3 \cdot 4^2 \cdot 4$; г) $7^2 \cdot 7 \cdot 7^5$;

д) $3^6 \cdot 3^7 \cdot 3 \cdot 3$; е) $6^4 \cdot 6^4 \cdot 6^3 \cdot 6^2$;

ж) $11^2 \cdot 11^9 \cdot 11^2$; з) $9^4 \cdot 9^6 \cdot 9^9 \cdot 9^4 \cdot 9$.

762. а) $a^5 \cdot a^4$; б) $a^3 \cdot a^8$; в) $a^{10} \cdot a$;

г) $a \cdot a^7$; д) $a \cdot a$; е) $a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4$.

763. а) $2^5 : 2^4$; б) $3^7 : 3^8$; в) $5^9 : 5$;

г) $\frac{10^4}{10}$; д) $\frac{5^7}{5^{13}}$; е) $\frac{8^{12}}{8^{10}}$.

764. а) $a^7 : a^3$; б) $a^8 : a^{12}$; в) $a^6 : a$;

г) $\frac{a^{12}}{a^4}$; д) $\frac{a^{20}}{a^{22}}$; е) $\frac{a^{20}}{a}$.

765. а) $\frac{10^2}{12^2}$; б) $\frac{4^3}{5^6}$; в) $\frac{25^4}{7^8}$;

г) $\frac{(m^3)^4}{(a^4)^3}$; д) $\frac{m^4 m^5}{a^8}$; е) $\frac{(n^4)^2}{a^{12}}$.

766. Сравните:

а) 3^4 и 4^3; б) 2^4 и 4^2; в) 10^{20} и 20^{10};

г) 100^{200} и 200^{100}; д) 1999^{2000} и 1998^{1999}.

767. Представьте в виде степени с основанием a^2:

а) $(a^5)^2$; б) $(a^3)^4$; в) $(a^6)^7$.

768. Представьте a^{50} в виде степени с основанием:

а) a^5; б) a^2; в) a^{10}.

769. Представьте в виде квадрата:

а) a^4; б) a^{20}; в) a^{50}.

770. Разложите на два множителя хотя бы одним способом:

а) 7^{10}; б) a^6; в) $(cd)^7$.

771. Разложите на три множителя хотя бы одним способом:

а) 5^6; б) b^5; в) $(ab)^4$.

772. Представьте a^{50} $(a \neq 0)$ в виде степени с основанием:

а) a^{-2}; б) a^{-5}; в) a^{10}; г) a^{-10}; д) a^{-25}.

773. Вместо звездочки запишите такое число, чтобы равенство было верным:

а) $3^5 \cdot * = 3^8$; б) $4^3 \cdot * = 4^6$; в) $2^4 \cdot * = 2^2$;

г) $(5^3)^* = 5^6$; д) $(4^3)^* = 4^{15}$; е) $2^* \cdot 3^* = 6^3$;

ж) $4^5 : * = 4^2$; з) $3^5 : * = 3^7$; и) $(2 \cdot 3)^* = 6^5$.

774. Вычислите:

а) $0{,}125^9\cdot 8^9$; б) $2^3\cdot 0{,}7^3\cdot 5^3$; в) $0{,}25^4\cdot 4^4$;

г) $0{,}2^5\cdot 2^5\cdot 5^5$; д) $4^3:2^3$; е) $12^{10}:6^{10}$.

8.3. Стандартный вид числа

Всякое положительное число A можно записать так:

$$A=a\cdot 10^k, \qquad (1)$$

где число a удовлетворяет неравенствам

$$1\leqslant a<10,$$

а k — целое число. Такую запись называют записью числа *в стандартном виде*. Показатель степени k здесь может быть любым целым числом — положительным, отрицательным, нулем; число 10^k называют *порядком числа* A.

Например, $273{,}095=2{,}73095\cdot 10^2$, $0{,}0234=2{,}34\cdot 10^{-2}$,

$0{,}21=2{,}1\cdot 10^{-1}$, $6781=6{,}781\cdot 10^3$,

$3{,}1=3{,}1\cdot 10^0$.

Здесь в правых частях равенств записаны числа в стандартном виде. Напомним, что значащей цифрой числа называют ее первую (слева направо), отличную от нуля цифру, а также все следующие за ней цифры (см. п. 3.5). Из этих примеров видно, что для приведения числа к стандартному виду надо перенести в нем запятую так, чтобы она оказалась непосредственно правее первой значащей цифры, и полученное число умножить на 10^k, где k подбирается так, чтобы произведение было равно данному числу.

Например, скорость света в вакууме равна 299792460 м/с, или $2{,}99792460\cdot 10^8$ м/с.

При решении многих задач числа округляют с точностью до первой, второй, третьей и т. д. значащей цифры. Числа a в записи (1) округляют с точностью, которая необходима в данной задаче, и тогда равенство (1) заменяют на приближенное равенство. Приведенное выше значение скорости света округлим с точностью до первой, второй, третьей, четвертой значащей цифры:

$$2{,}99792460\cdot 10^8\ \text{м/с}\approx 3\cdot 10^8\ \text{м/с},$$
$$2{,}99792460\cdot 10^8\ \text{м/с}\approx 3{,}0\cdot 10^8\ \text{м/с},$$
$$2{,}99792460\cdot 10^8\ \text{м/с}\approx 3{,}00\cdot 10^8\ \text{м/с},$$
$$2{,}99792460\cdot 10^8\ \text{м/с}\approx 2{,}998\cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

В п. 3.5 сказано, что при приближенном умножении и делении чисел надо округлять сами числа и результат вычислений с точностью до одной и той же значащей цифры. Если же записать числа в стандартном виде, то округление чисел и результата вычислений с нужной точностью только упростится. Это видно из следующего примера.

Пример. Пусть $a=42{,}38(3)$; $b=0{,}0001276$; $c=3153000$. Вычислим: а) $a\cdot b$; б) $a\cdot c$; в) $a:c$; г) $b:c$, округлив числа до третьей значащей цифры.

Запишем числа в стандартном виде, округлим первые множители с точностью до одной сотой и выполним отдельно вычисления с первыми множителями и с порядками; результаты вычислений запишем в стандартном виде и также округлим с точностью до одной сотой:

$$a=42{,}38(3)=4{,}238(3)\cdot 10\approx 4{,}24\cdot 10^1;$$
$$b=0{,}0001276=1{,}276\cdot 10^{-4}\approx 1{,}28\cdot 10^{-4};$$
$$c=3153000=3{,}153\cdot 10^6\approx 3{,}15\cdot 10^6.$$

а) $a\cdot b\approx(4{,}24\cdot 10^1)\cdot(1{,}28\cdot 10^{-4})=(4{,}24\cdot 1{,}28)\cdot(10^1\cdot 10^{-4})=$
$=5{,}4272\cdot 10^{-3}\approx 5{,}43\cdot 10^{-3}$;

б) $a\cdot c\approx(4{,}24\cdot 10^1)\cdot(3{,}15\cdot 10^6)=(4{,}24\cdot 3{,}15)\cdot(10^1\cdot 10^6)=$
$=13{,}356\cdot 10^7=1{,}3356\cdot 10^8\approx 1{,}34\cdot 10^8$;

в) $a:c\approx(4{,}24\cdot 10^1):(3{,}15\cdot 10^6)=(4{,}24:3{,}15)\cdot(10^1:10^6)=$
$=1{,}346...\cdot 10^{-5}\approx 1{,}35\cdot 10^{-5}$;

г) $b:c\approx(1{,}28\cdot 10^{-4}):(3{,}15\cdot 10^6)=(1{,}28:3{,}15)\cdot(10^{-4}:10^6)=$
$=0{,}4063...\cdot 10^{-10}=4{,}063...\cdot 10^{-11}\approx 4{,}06\cdot 10^{-11}$.

Замечание. В практических расчетах надо учитывать, что описанные в п. 3.5 правила дают более точные результаты при большем числе значащих цифр (см. замечание в п. 3.5).

775°. а) Что называют записью числа в стандартном виде?
б) Любое ли положительное число можно записать в стандартном виде?
в) Как привести число к стандартному виду, используя его значащие цифры?

776. Запишите число в стандартном виде, укажите порядок числа:

а) 27,4;	б) 3821;	в) 0,0011;
г) 290000;	д) 0,00013;	е) 0,00987;
ж) 12345;	з) 980012;	и) 9835;
к) 197;	л) 11910;	м) 12190.

777. Назовите все значащие цифры числа в задании 776.

778. При каком значении n выполняется равенство:
а) $60{,}2\cdot 10^n=6{,}02\cdot 10^3$;
б) $352\cdot 10^n=3{,}52\cdot 10^{12}$;
в) $740\cdot 10^n=7{,}4\cdot 10^{-4}$;
г) $19800\cdot 10^n=1{,}9800\cdot 10^{-15}$;
д) $0{,}02\cdot 10^n=2\cdot 10^7$;

е) $0{,}036\cdot 10^n=3{,}6\cdot 10^3$;

ж) $0{,}0005\cdot 10^n=5$;

з) $0{,}000188\cdot 10^n=1{,}88\cdot 10^{-8}$?

779. Запишите число в стандартном виде:

а) $27{,}4\cdot 10^2$; б) $382\cdot 10^{-4}$; в) $0{,}11\cdot 10^8$;
г) $290\cdot 10^{-3}$; д) $0{,}12\cdot 10^{-2}$; е) $0{,}19\cdot 10^{-2}$;
ж) $0{,}069\cdot 10^4$; з) $9992\cdot 10^0$; и) $0{,}480\cdot 10^{-2}$;
к) $0{,}0398\cdot 10^2$; л) $796\cdot 10^4$; м) $9989\cdot 10^0$.

780. Вычислите:

а) $(1{,}2\cdot 10^5)\cdot(5\cdot 10^{-3})$; б) $(4\cdot 10^{12})\cdot(1{,}5\cdot 10^{-7})$;
в) $(3{,}6\cdot 10^2):(9\cdot 10^{-3})$; г) $(5\cdot 10^{-4}):(2{,}5\cdot 10^9)$;
д) $1280:0{,}625$; е) $0{,}00016\cdot 625000$;
ж) $\dfrac{2\cdot 10^5\cdot 7{,}2\cdot 10^{-3}}{1{,}8\cdot 10^7}$; з) $\dfrac{1{,}25\cdot 10^{-12}\cdot 4\cdot 10^5}{10^{-13}}$.

781. Дано: $a=0{,}000002546$, $b=648400000$. Вычислите, округлив числа с точностью до третьей значащей цифры:
а) $a\cdot b$; б) $a:b$; в) $b:a$.

782. Верно ли, что:

а) порядок произведения двух чисел равен произведению их порядков;

б) порядок частного двух чисел равен частному их порядков?

783. Скорость движения Земли вокруг Солнца равна $3\cdot 10^4$ м/с. За какое время Земля пройдет вокруг Солнца путь $1{,}8\cdot 10^{20}$ м?

784. Скорость звука в воздухе (при 0 °С) равна 332 м/с. Через сколько минут звук достигнет объекта, находящегося на расстоянии 18,592 км от источника звука?

8.4. Преобразование рациональных выражений

Ранее уже преобразовывались рациональные (в частности, числовые) выражения. В этом пункте будет показано, что иногда запись таких преобразований упрощается, если воспользоваться степенью с целым показателем.

Для краткой записи алгебраических дробей принято применять степень с отрицательным показателем. Например, вместо $\dfrac{1}{(a-b)^2}$ пишут $(a-b)^{-2}$; вместо $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ пишут $(2^{-1}+3^{-1})^{-1}$.

Этой краткой записью можно пользоваться при преобразовании рациональных выражений. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Докажем равенство

$$(a^{-1}-b^{-1})\cdot(a^{-1}+b^{-1})=a^{-2}-b^{-2}.$$

Заметим, что в левой части равенства записано произведение разности и суммы выражений a^{-1} и b^{-1}, которое можно записать как разность квадратов тех же выражений:

$$(a^{-1}-b^{-1})\cdot(a^{-1}+b^{-1})=(a^{-1})^2-(b^{-1})^2=a^{-2}-b^{-2},$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Упростим выражение $\dfrac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{2}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}$.

I способ. Преобразуем выражение, используя свойство степени с натуральным показателем, формулы квадрата разности, разности квадратов и правила действий с алгебраическими дробями $A=\dfrac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{2}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2-2\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2-\left(\dfrac{1}{b}\right)^2}=$

$$=\frac{\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)}=\frac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\frac{\dfrac{b-a}{ab}}{\dfrac{b+a}{ab}}=\frac{(b-a)\cdot ab}{(b+a)\cdot ab}=\frac{b-a}{b+a}.$$

II способ. Заметим, что после записи дробей в виде степени с отрицательным показателем в числителе данной дроби получится квадрат разности выражений a^{-1} и b^{-1}, а в знаменателе — разность квадратов этих же выражений:

$$A=\frac{a^{-2}-2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}=\frac{(a^{-1}-b^{-1})^2}{(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}+b^{-1})}=\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\frac{\dfrac{b-a}{ab}}{\dfrac{b+a}{ab}}=\frac{(b-a)\cdot ab}{(b+a)\cdot ab}=\frac{b-a}{b+a}.$$

Пример 3. Вычислим значение выражения

$$\frac{(999^{-1}-1000^{-1})(999^{-1}+1000^{-1})}{(1000^{-1}-999^{-1})^2}.$$

I способ. Чтобы избежать громоздких вычислений с дробями, имеющими знаменатели 999 и 1000, обозначим $a=999$, $b=1000$ и сначала упростим буквенное выражение:

$$B=\frac{(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}+b^{-1})}{(b^{-1}-a^{-1})^2}=\frac{(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}+b^{-1})}{(a^{-1}-b^{-1})^2}=\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}=\frac{\dfrac{b+a}{ab}}{\dfrac{b-a}{ab}}=\frac{(b+a)\cdot ab}{ab\cdot(b-a)}=\frac{b+a}{b-a}.$$

Теперь, подставляя в полученное выражение вместо a и b числа 999 и 1000 соответственно, получим, что искомое выражение равно $\frac{1000+999}{1000-999}=\frac{1999}{1}=1999$.

II способ. Обозначим $a=999^{-1}$, $b=1000^{-1}$ и сначала упростим буквенное выражение:

$$B=\frac{(a-b)(a+b)}{(b-a)^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Теперь, подставляя в полученное выражение вместо a и b числа 999^{-1} и 1000^{-1} соответственно, получим, что искомое выражение равно $\frac{999^{-1}+1000^{-1}}{999^{-1}-1000^{-1}}=\frac{\frac{1}{999}+\frac{1}{1000}}{\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}}=\frac{\frac{1999}{999\cdot1000}}{\frac{1}{999\cdot1000}}=\frac{1999}{1}=1999$.

Замечание. Напомним, что алгебраические равенства являются тождествами при тех значениях входящих в них букв, при которых правые и левые части равенств имеют смысл. Поэтому в примере 1 равенство является тождеством при $a\neq0$, $b\neq0$; в примере 2 равенство $A=\frac{b-a}{b+a}$ является тождеством при $a\neq0$, $b\neq0$, $a\neq b$, $a\neq-b$; в примере 3 равенство $B=\frac{b+a}{b-a}$ является тождеством при $a\neq0$, $b\neq0$, $a\neq b$.

---

785. Запишите без отрицательных показателей степеней:

а) $a^{-1}+b^{-1}$; б) $(a+b)^{-2}$;

в) $(a^{-2}-b^{-2})^{-1}$; г) $(a+a^{-1})^{-1}$.

786. Вычислите:

а) $5^{-1}+10^{-1}$; б) $(0{,}5+1)^{-2}$; в) $(2^{-4}+4^{-2})^{-1}$;

г) $(2-2^{-1})^{-1}$; д) $3^{-1}+9^{-1}$; е) $(0{,}2+1)^{-1}$;

ж) $(4^{-2}-4^{-3})^{-1}$; з) $(3-3^{-1})^{-2}$.

787. Докажите равенство:

а) $(a^{-1}+b^{-1})^2=a^{-2}+2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}$;

б) $(a^{-1}-b^{-1})^2=a^{-2}-2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}$;

в) $(a^{-1}-b^{-1})(a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2})=a^{-3}-b^{-3}$;

г) $(a^{-1}+b^{-1})(a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2})=a^{-3}+b^{-3}$.

При каких значениях a и b эти равенства являются тождествами?

788. Упростите выражение:

а) $\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}$; б) $\frac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-1}+b^{-1}}$;

в) $\frac{a^{-3}-b^{-3}}{a^{-1}-b^{-1}}$; г) $\frac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}+b^{-2}}$.

789. При каких значениях a и b выражение:

а) $\dfrac{(a-3)^7}{(a-3)^{-2}}-\dfrac{(a-3)^2}{(a+3)^{-2}}$; б) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^7-\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{-7}$

равно 0?

790. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^{-2}+2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}$; б) $\dfrac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}$;

в) $\left(\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)^5\cdot\left(\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)^{-5}$; г) $\left(\dfrac{a^2-a^{-2}}{a^2+a^{-2}}\right)^7:\left(\dfrac{a^2+a^{-2}}{a^2-a^{-2}}\right)^{-7}$;

д) $\dfrac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}$; е) $\dfrac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{2}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{3}{a^2b}+\dfrac{3}{ab^2}-\dfrac{1}{b^3}}$.

791. Вычислите:

а) $\dfrac{2000^{-3}-1999^{-3}}{2000^{-2}+2000^{-1}1999^{-1}+1999^{-2}}$;

б) $\dfrac{1222^{-3}+777^{-3}}{1222^{-2}-1222^{-1}777^{-1}+777^{-2}}$.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

1. Делимость многочленов

Деление нацело. В § 7 частное от деления многочлена A на ненулевой многочлен B названо алгебраической дробью. Здесь будет рассмотрен лишь тот случай, когда это частное есть многочлен.

Многочлен A делится нацело на ненулевой многочлен B, если существует многочлен C, такой, что

$$A=B\cdot C. \qquad (1)$$

Обычно здесь слово «нацело» для краткости опускают. Например, многочлен $A=a^2+2ab+b^2$ делится на ненулевой многочлен $B=a+b$, поскольку

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b).$$

В п. 5.6 равенство (1) названо разложением многочлена A в произведение двух многочленов B и C. Поэтому можно сказать и так: разделить нацело многочлен A на ненулевой многочлен B — значит разложить многочлен A в произведение двух многочленов, один из которых есть B.

Формулы сокращенного умножения дают примеры деления некоторых многочленов на ненулевые многочлены $a+b$ и $a-b$.

Например, многочлен $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ делится на ненулевой многочлен $a+b$, поскольку

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)(a+b)^2.$$

Многочлен $a^2-2ab+b^2$ делится на ненулевой многочлен $a-b$, поскольку

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b).$$

Покажем, что справедливо утверждение: при любом натуральном n многочлен a^n-b^n делится на ненулевой многочлен $a-b$.

Действительно, если $n=1$, то выполняется очевидное равенство

$$a-b=(a-b)\cdot 1.$$

Если $n=2$ или $n=3$, то выполняются равенства

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$

доказанные в § 6.

Равенства

$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3),$$
$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$

легко доказать умножением многочленов, находящихся в правых частях этих равенств.

Вообще для любого натурального числа $n\geqslant 2$ можно доказать равенство

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}). \qquad (2)$$

Равенство (2) называют формулой разложения на множители многочлена a^n-b^n.

Покажем, что из равенства (2) для любого натурального $n\geqslant 2$ вытекает равенство

$$a^{2n-1}+b^{2n-1}=(a+b)(a^{2n-2}-a^{2n-3}b+\ldots-ab^{2n-3}+b^{2n-2}). \qquad (3)$$

Обозначим $c=-b$, тогда $b^{2n-1}=-c^{2n-1}$. Поэтому

$$a^{2n-1}+b^{2n-1}=a^{2n-1}-c^{2n-1}.$$

Разложим правую часть этого равенства на множители с помощью равенства (2):

$$a^{2n-1}-c^{2n-1}=(a-c)(a^{2n-2}+a^{2n-3}c+\ldots+ac^{2n-3}+c^{2n-2}). \qquad (4)$$

Заменив в равенстве (4) c на $-b$, получим равенство (3).

Равенство (3) называют формулой разложения на множители многочлена $a^{2n-1}+b^{2n-1}$.

Заметим, что многочлен $a^{2n}+b^{2n}$ не делится ни на $a+b$, ни на $a-b$.

Деление с остатком. Далее будем рассматривать лишь многочлены относительно x, т. е. многочлены вида

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — данные числа, называемые **коэффициентами многочлена**, коэффициент a_n называют **коэффициентом при старшем члене**, а коэффициент a_0 — **свободным членом**. Если $a_n\neq 0$, то **степенью многочлена** называют степень его старшего члена.

Например, коэффициенты многочлена $5x^3+4x^2-2x+7$ равны 5, 4, -2 и 7, коэффициент при старшем члене равен 5, свободный член равен 7, степень многочлена равна 3. Если все коэффициенты многочлена равны нулю, то этот многочлен есть нулевой многочлен (его степень не определяется).

Пусть даны два многочлена

$$A=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$
$$B=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$$

относительно x, причем B — ненулевой многочлен степени m, т. е. $b_m\neq 0$. Разделить многочлен A на многочлен B с остатком — значит найти многочлены Q и R, такие, что выполняется равенство $A=Q\cdot B+R$, причем либо степень многочлена R меньше степени многочлена B, либо R — нулевой многочлен. Многочлен Q называют частным (неполным частным), многочлен R — остатком. Если R есть нулевой многочлен, то многочлен A делится на ненулевой многочлен B нацело.

Заметим, что многочлен нулевой степени есть число, не зависящее от x. Любое число, отличное от нуля, можно рассматривать как делитель любого многочлена. Например, число $\frac{1}{7}$ есть делитель многочлена x^2+2x+3, потому что $x^2+2x+3=\frac{1}{7}(7x^2+14x+21)$.

Деление с остатком многочлена A на ненулевой многочлен B обычно выполняют уголком.

Пример 1. Разделим многочлен x^3-8 на $x-3$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+0x^2+0x-8 & x-3 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3-3x^2} & x^2+3x+9 \\
-\underline{3x^2+0x} & \\
\underline{3x^2-9x} & \\
-\underline{9x-8} & \\
\underline{9x-27} & \\
19 &
\end{array}
$$

Итак, $x^3-8=(x^2+3x+9)(x-3)+19$. При делении многочлена x^3-8 на двучлен $x-3$ получено неполное частное x^2+3x+9 и остаток 19.

Пример 2. Разделим многочлен x^3-8 на $x-2$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+0x^2+0x-8 & x-2 \\
\cline{2-2}
-\underline{x^3-2x^2} & x^2+2x+4 \\
2x^2+0x & \\
-\underline{2x^2-4x} & \\
-4x-8 & \\
\underline{4x-8} & \\
0 &
\end{array}
$$

Итак, $x^3-8=(x^2+2x+4)(x-2)$. Многочлен x^3-8 разделился на $x-2$ нацело, получено частное x^2+2x+4 и остаток — нулевой многочлен.

Алгоритм Евклида. Пусть даны два многочлена

$$
\begin{aligned}
A&=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,\\
B&=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0
\end{aligned}
$$

относительно x, причем $a_n\neq0$, $b_m\neq0$ и $n\geqslant m$. Наибольшим общим делителем многочленов A и B называют многочлен наибольшей степени $k\leqslant m$, на который делится и многочлен A, и многочлен B. Наибольший общий делитель многочленов A и B обозначают НОД (A, B). Запись НОД $(A, B)=1$ означает также, что наибольший общий делитель многочленов A и B есть многочлен нулевой степени, т. е. любое действительное отличное от нуля число (любая отличная от нуля константа).

Если A делится на B нацело, т. е. $A=Q\cdot B$, то НОД $(A, B)=B$. Если же A не делится на B нацело, то повторим рассуждения для многочленов A и B как при применении алгоритма Евклида для натуральных чисел a и b, заменяя a на A, b на B. Для этого разделим с остатком многочлен A на многочлен B:

$$A=Q_1\cdot B+R_1,$$

где степень остатка R_1 меньше степени многочлена B (R_1 не может быть нулевым многочленом).

Теперь разделим с остатком B на R_1:

$$B=Q_2\cdot R_1+R_2,$$

где либо степень остатка R_2 меньше степени многочлена R_1, либо R_2 — нулевой многочлен. Если R_2 — нулевой многочлен, то НОД $(A, B)=R_1$. Если R_2 — ненулевой многочлен, то продолжим процесс последовательного деления многочленов с остатком. Этот процесс, как и в случае натуральных чисел, конечен, так как степени многочленов $R_1, R_2, \ldots, R_{k-1}$ строго убывают. В результате деления на k-м шаге получим систему равенств:

$$\begin{cases} A = Q_1 \cdot B + R_1, \\ B = Q_2 \cdot R_1 + R_2, \\ R_1 = Q_3 \cdot R_2 + R_3, \\ \quad \dots\dots\dots \\ R_{k-3} = Q_{k-1} \cdot R_{k-2} + R_{k-1}, \\ R_{k-2} = Q_k \cdot R_{k-1}. \end{cases} \tag{5}$$

Просматривая цепочку равенств (5) снизу вверх, находим, что R_{k-1} является делителем многочленов A и B. Больше того, R_{k-1} есть наибольший общий делитель многочленов A и B, так как если просматривать цепочку равенств (5) сверху вниз, то окажется, что любой делитель A и B является делителем R_{k-1}. Следовательно, НОД $(A, B) = R_{k-1}$.

Проведенный процесс называют алгоритмом Евклида для многочленов, его используют для нахождения наибольшего общего делителя двух многочленов.

Рассмотрим пример использования алгоритма Евклида для многочленов.

Пример 1. Найдем наибольший общий делитель многочленов $A = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ и $B = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

Применим алгоритм Евклида:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+3x^2+3x+2 & x^3+2x^2+2x+1 \\ \underline{x^3+2x^2+2x+1} & \overline{1} \\ x^2+x+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+2x^2+2x+1 & x^2+x+1 \\ \underline{x^3+x^2+x} & \overline{x+1} \\ -\,x^2+x+1 & \\ \underline{x^2+x+1} & \\ 0 & \end{array}$$

Искомый наибольший общий делитель данных многочленов есть последний неравный нулевому многочлену остаток в алгоритме Евклида, т. е. НОД $(A, B) = x^2 + x + 1$.

Пример 2. Найдем наибольший общий делитель многочленов $A = x^2 - x - 3$ и $B = x + 1$.

Применим алгоритм Евклида:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^2-x-3 & x+1 \\ \underline{x^2+x} & \overline{x-2} \\ -\,-2x-3 & \\ \underline{-2x-2} & \\ -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,x+1 & -1 \\ \underline{x+1} & \overline{-x-1} \\ 0 & \end{array}$$

Мы получили НОД $(A, B) = -1$, но тогда наибольший общий делитель многочленов A и B есть любое действительное число. Принято писать, что НОД $(A, B) = 1$.

792. Докажите формулу разложения на множители для:
а) $a^5 - b^5$; б) $a^6 - b^6$; в) $a^5 + b^5$; г) $a^7 + b^7$.

793. Сократите дробь:
а) $\dfrac{a^3 - b^3}{a^4 - b^4}$; б) $\dfrac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$; в) $\dfrac{a^5 - b^5}{a^3 - b^3}$;
г) $\dfrac{a^5 + b^5}{a^7 + b^7}$; д) $\dfrac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{a^4 - b^4}$;
е) $\dfrac{a^5 + b^5}{a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4}$; ж) $\dfrac{a^3 - 8}{a^4 - 16}$; з) $\dfrac{a^3 + 27}{a^2 - 3a + 9}$;
и) $\dfrac{a^5 - 32}{a^3 - 8}$; к) $\dfrac{a^5 + 32}{a^7 + 128}$; л) $\dfrac{a^3 + 2a^2 + 4a + 8}{a^4 - 16}$;
м) $\dfrac{a^5 + 1}{a^4 - a^3 + a^2 - a + 1}$.

794. Сократима ли дробь:
а) $\dfrac{a^{1999} + b^{1999}}{a^{1997} + b^{1997}}$; б) $\dfrac{a^{1999} - 1}{a^{1998} - 1}$?

795. Разделите с остатком многочлен:
а) $x^3 - 4x^2 + x + 6$ на $x + 1$; на $x - 2$; на $x - 3$;
б) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 6$ на $x^2 + x + 1$; на $x^2 + x - 1$; на $x + 2$;
в) $x^5 - 1$ на $x^4 + 1$; на $x^3 - 1$; на $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

796. Найдите НОД (A, B), если:
а) $A = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $B = x^3 - 2x^2 + 1$;
б) $A = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $B = x^3 - 1$;
в) $A = x^5 - x^4 - x^3 + 2x^2 - x$, $B = x^5 - x^4 + x^3 - x$;
г) $A = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x$, $B = x^2 - 4x + 3$.

797. Сократите дробь:
а) $\dfrac{x^3 - x^2 + x + 3}{x^2 - 2x + 3}$; б) $\dfrac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x^2 + 2x + 5}$;
в) $\dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$; г) $\dfrac{x^3 + 8}{x^3 - 4x^2 + 8x - 8}$.

798. Докажите, что дробь несократима:
а) $\dfrac{x^4 + 1}{x^3 + 1}$; б) $\dfrac{x^3 + 9}{x^2 - 1}$.

799. Найдите многочлен A, для которого верно равенство:
а) $x^{12} - 1 = (x^4 - 1) \cdot A$; б) $x^{12} - 1 = (x^2 + 1) \cdot A$;
в) $x^{12} - 1 = (x^2 - 1) \cdot A$; г) $x^{12} - 1 = (x + 1) \cdot A$;
д) $x^{12} - 1 = (x - 1) \cdot A$; е) $x^5 - 32 = (x - 2) \cdot A$;
ж) $x^6 - 64 = (x - 2) \cdot A$; з) $x^7 - 128 = (x - 2) \cdot A$.

2. Исторические сведения

И. Ньютон

Алгебра — часть математики, посвященная изучению буквенных выражений и уравнений. Долгое время алгебра была частью науки о числе — арифметики. Среди различных задач, которые ставит жизнь, многие решаются одинаковыми способами. Используя вместо чисел буквы, математики научились решать такие задачи в общем виде. На этом пути и образовалась математическая наука алгебра. О связи арифметики и алгебры великий английский ученый И. Ньютон (1643—1727) писал так: «Все действия арифметики столь необходимы в алгебре, что они лишь совместно образуют полную науку вычислений».

Зачатки алгебры были известны в Вавилоне, Египте и Греции задолго до нашей эры. Сохранился папирус Ахмеса (ок. 1700 г. до н. э.) с решениями алгебраических задач. Греческий математик Диофант, живший в III в. в г. Александрии, написал трактат «Арифметика», в котором он свободно обращался с линейными и другими уравнениями, использовал буквы и значки для обозначения неизвестных и их степеней (рис. 12).

x^0	$\overset{\circ}{M}$
x^1	S
x^2	Δ^{Y}
x^3	K^{Y}
x^4	$\Delta^{Y}\Delta$
x^5	ΔK^{Y}
x^6	$K^{Y}K$

Рис. 12

В средние века особенно активно алгебра развивалась в арабских странах и в Средней Азии. В IX в. узбекский математик и астроном Мухаммед аль-Хорезми написал труд под названием «Книга о восстановлении и противопоставлении». Восстановлением он называл перенос вычитаемого из одной части уравнения в другую, где оно становится слагаемым; противопоставлением — собирание неизвестных в одну часть уравнения, а известных — в другую. По-арабски слово «восстановление» — «альджебр». Отсюда происходит название науки о решении уравнений — алгебра.

На протяжении многих веков развитие арифметики и алгебры сильно тормозилось из-за отсутствия удачных обозначений. Без них изложение математических работ было громоздким.

Только начиная с XVI столетия постепенно в математику начали вводить обозначения, которые оказались удобными для работы. Многие из них сохранились до наших дней. Важнейший вклад в разработку алгебраической символики внес в конце XVI в. Ф. Виет (1540—1603). Пользуясь алгебраической символикой, Виет установил единообразный прием решения уравнений по общим формулам, но его символика еще была далека от современной. В этом легко убедиться, сравнив пример записи выражения в одном из его произведений (рис. 13) и его современную запись:

$$\frac{Din \left[\begin{array}{l} B\ cubum\ 2 \\ --D\ cubo \end{array} \right.}{\begin{array}{l} B\ cubo \\ +D\ cubo \end{array}} \qquad \frac{D\cdot(2\cdot B^3 - D^3)}{B^3+D^3}$$

Рис. 13

В книге «Всеобщая арифметика» И. Ньютон вводит алгебраические дроби так: «Запись одной из двух величин под другой, ниже которой между ними проведена черта, обозначает частное или же величину, возникающую при делении верхней величины на нижнюю. Так ... $\frac{a}{b}$ есть величина, возникающая при делении a на b ... . Точно так же $\frac{ab-bb}{a+x}$ означает величину, получающуюся при делении $ab-bb$ на $a+x$ и т. д. Величины такого рода называются дробями».

Символы a^2, a^3, a^4 и т. д. впервые встречаются у французского ученого Р. Декарта (1596—1650). Символ a^n для произвольного n предложил И. Ньютон.

Мы уже отмечали, что в XVIII в. в России большое влияние на распространение математических знаний оказала «Арифметика» Л. Ф. Магницкого, содержавшая в себе, кроме арифметики, необходимые для практических приложений сведения из алгебры, тригонометрии, геометрии, астрономии и навигации. В частности, в ней изложены правила действий над многочленами, правила решения линейных уравнений и т. д. В правом нижнем углу титульного листа «Арифметики» Л. Ф. Магницкого изображен Архимед, опирающийся на доску с надписью:

$$\begin{array}{l} 2R+1 \\ \underline{3R \div 2} \\ 6q+3R \\ \underline{\quad \div 4R \div 2} \\ 6q \div 1R \div 2 \end{array}$$

Это запись примера на умножение многочленов столбиком. Буквой R (от лат. *Radix* корень) обозначено неизвестное число, буквой q квадрат неизвестного, знак $\div$ был знаком вычитания. В современных обозначениях то же действие можно записать так:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 2x+1 \\ 3x-2 \\ \hline \end{array} \\ + \begin{array}{r} 6x^2+3x \\ -4x-2 \\ \hline 6x^2-1x-2 \end{array} \end{array}$$

Как видно из приведенных примеров, алгебраическая символика, которой, возможно, первым пользовался Диофант в III в., совершенствовалась и после «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.

3. Задания для повторения

800. Разложите число на простые множители:

а) 254; б) 1276; в) 1654; г) 2048.

801°. Существуют ли четные простые числа?

802. Чтобы узнать, является ли число простым, его делят на простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, ... На каком простом числе можно прекращать испытание для числа:

а) 781; б) 1023; в) 1783; г) 2587?

803. Сравните числа:

а) $\frac{7}{8}$ и $\frac{5}{8}$; б) $1\frac{1}{7}$ и $\frac{8}{7}$;

в) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; г) $-\frac{3}{5}$ и $-\frac{3}{4}$;

д) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$; е) $\frac{10}{7}$ и $1\frac{3}{6}$;

ж) $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{5}$; з) $-1\frac{2}{3}$ и $-1,(4)$;

и) $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{9}$.

804. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\frac{2}{7}$; $\frac{5}{21}$; $\frac{11}{40}$; $\frac{3}{11}$; 0,(28);

б) 2,(5); 2,5; 2,(56);

в) $-2,(1)$; $-2,1$; $-2,(0,1)$;

г) $-0,(4)$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{4}$;

д) 3,145926; $\frac{22}{7}$; 3,(14);

е) $-3,(3)$; $-3\frac{2}{9}$; $-3\frac{2}{3}$.

805. Изобразите на координатной прямой числа:

а) $\frac{1}{4}$; 2,5; 1,2; $\frac{3}{8}$; $-0{,}4$;

б) 1,3; $1\frac{7}{10}$; $-1\frac{2}{5}$; 0,7; $-1{,}1$;

в) $-\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{4}$; 0,2; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{5}$;

г) $-0{,}12$; $-0{,}17$; $-0{,}19$; $-0{,}13$; $-0{,}15$;

д) 3,1415926 и $\frac{22}{7}$;

е) $\frac{71}{41}$ и 1,73205;

ж) $-5{,}(123)$ и $-5{,}1(23)$;

з) $-2{,}07(7)$ и $-2{,}(077)$.

806. Найдите координату точки A, если A — середина отрезка CD (рис. 14).

807. Найдите координату точки A (рис. 15).

808. Укажите приближенно координату точки A (рис. 16).

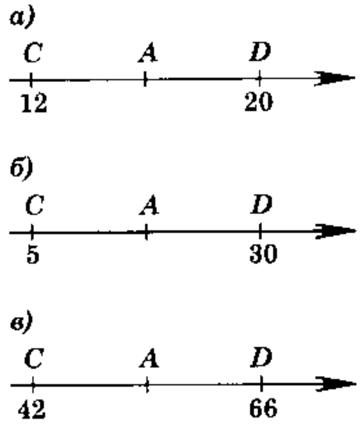


Рис. 14

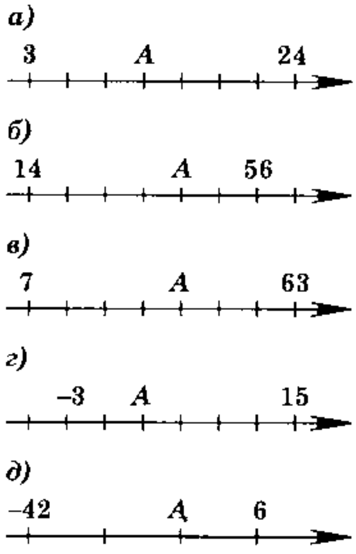


Рис. 15

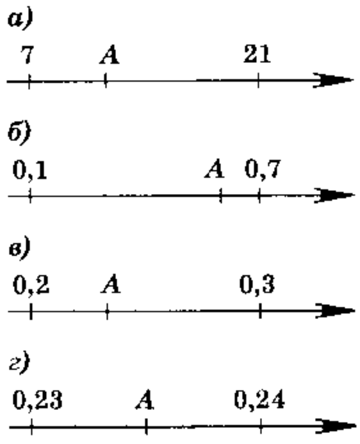


Рис. 16

809°. а) Существует ли между множеством точек числовой прямой и множеством действительных чисел взаимно однозначное соответствие?

б) Почему между множеством точек числовой прямой и множеством рациональных чисел нельзя установить взаимно однозначное соответствие?

в) Какие числа надо добавить к рациональным, чтобы любой точке числовой прямой соответствовало определенное число?

810. Восстановите вместо звездочки пропущенные знаки действий:

а) $1 * 2 = 2$;

б) $1 * 2 * 3 = 2$;

в) $1 * 2 * 3 * 4 = 2$;

г) $1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 2$;

д) $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 2$;

е) $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 2$.

811. Определите правило, по которому из каждого предыдущего числа получают следующее:

а) 1, 3, 9, 27, 81; б) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4;

в) 7, 14, 21, 28, 35.

812. 1) Между какими степенями числа 2 расположено число:

а) 6; б) 13; в) 67;

г) 255; д) 1025?

2) Между какими степенями числа 10 расположено число:

а) 32; б) 167; в) 3576;

г) 12784; д) 1000034?

813. Для каких чисел a и b верно равенство:

а) $a+b=0$; б) $a-b=0$;

в) $a \cdot b=0$; г) $a \cdot b=b$?

814. Может ли число быть:

а) больше своей абсолютной величины (приведите примеры);

б) равным своей абсолютной величине (приведите примеры);

в) меньше своей абсолютной величины (приведите примеры)?

815. Упростите выражения $a+|a|$ и $a-|a|$, если:

а) $a>0$; б) $a=0$; в) $a<0$.

816. Отметьте на координатной оси числа, для которых верно неравенство:

а) $x>5$; б) $x \leqslant -1$; в) $x \geqslant 0$;

г) $|x|=2$; д) $|x|<2$; е) $|x| \geqslant 2$.

817. Выделите на числовой прямой точки x, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $|x|=3$; б) $|x|<3$; в) $|x|>3$.

818. Разложите данные дроби в десятичные:

а) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{13}{25}$, $\frac{11}{16}$;

б) $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{12}$.

819. Запишите десятичные дроби в виде обыкновенных:

0,25; 0,75; 14,05; 0,125; 0,875; 1,0075.

820. Укажите число, обратное данному числу:

а) 2; б) $\frac{1}{5}$; в) $2\frac{1}{3}$; г) 1,3.

821. Разложите на простые множители число:

а) 144; б) 216; в) 1256; г) 2544.

822. Сократите дробь:

а) $\frac{24}{36}$; б) $\frac{108}{252}$; в) $\frac{144}{216}$; г) $\frac{1800}{4500}$.

823. Вычислите:

а) $\frac{0,2}{0,5}$; б) $\frac{1,1}{0,0121}$; в) $\frac{0,0003}{510}$;

г) $\frac{2}{0,5}$; д) $\frac{3}{\frac{1}{2}}$; е) $\frac{1,2}{1\frac{1}{3}}$.

824. Вместо звездочки подберите число так, чтобы равенство было верным:

а) $\frac{6}{9}=\frac{*}{3}$; б) $\frac{28}{40}=\frac{*}{10}$; в) $\frac{12}{32}=\frac{3}{*}$;

г) $-\frac{15}{75}=-\frac{1}{*}$; д) $\frac{64}{36}=1\frac{7}{*}$; е) $\frac{276}{108}=2\frac{*}{9}$;

ж) $7=\frac{*}{2}$; з) $1\frac{1}{3}=\frac{*}{3}$; и) $\frac{4}{7}=\frac{20}{*}$;

к) $\frac{1}{4}=\frac{*}{12}$.

Вычислите **(825—827)**:

825°. а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; б) $17-\frac{1}{3}$; в) $1278-\frac{2}{7}$; г) $\frac{1}{2}-3$.

826. а) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$; б) $\dfrac{1\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{2}{3}}$; в) $1\frac{1}{2}-7\frac{5}{8}$;

г) $2\frac{1}{3}-5\frac{1}{9}$; д) $2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}$; е) $1,5:1\frac{1}{3}$.

827. а) $386\cdot13+214\cdot13$;

б) $2,78\cdot1,5+1,5\cdot7,22$;

в) $7\frac{1}{3}\cdot5\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}\cdot5\frac{1}{2}$;

г) $3,75\cdot1\frac{11}{14}-\frac{2}{7}\cdot3\frac{3}{4}$.

828. Составьте два примера на вычисление с использованием вынесения за скобки общего множителя.

Вычислите (**829—832**):

829. а) $2{,}7\cdot 3\frac{1}{2}+2{,}7\cdot 6\frac{1}{2}$;

б) $0{,}41\cdot 7\frac{1}{5}-5{,}2\cdot 0{,}41$;

в) $\left(8\frac{1}{2}-3\frac{3}{4}\right)\cdot 8$;

г) $\left(4-1\frac{1}{6}+6\frac{1}{4}\right):\frac{1}{2}$;

д) $3\frac{3}{5}-1\frac{1}{2}+2\frac{2}{5}$;

е) $7\frac{3}{8}-4\frac{3}{4}+3\frac{1}{2}$;

ж) $\left(4\frac{1}{3}-12\frac{1}{2}-2\frac{1}{5}\right):2$;

з) $\left(6\frac{2}{3}-9\frac{3}{5}+15\frac{1}{2}\right):3$.

830. а) $15:7{,}5+0{,}12:0{,}04+1{,}69:0{,}13+2:50$;

б) $0{,}35:0{,}07+12:0{,}3+0{,}2:5+72:144$;

в) $72:2{,}4+6:12+45:4{,}5+0{,}84:0{,}021$;

г) $0{,}75:15+18:36+24:0{,}06+0{,}52:0{,}13$;

д) $\left(1{,}6-2\frac{1}{6}+\frac{41}{90}\right)\cdot 3\frac{3}{5}-0{,}25:1{,}25$;

е) $3{,}25:3\frac{1}{5}+6{,}75\cdot\left(\frac{47}{60}-2\frac{17}{45}+1{,}65\right)$;

ж) $12:7\frac{1}{2}+7{,}5:12+\frac{1}{4}:0{,}4\cdot(5{,}1-3{,}86)$;

з) $12:1\frac{1}{2}+13{,}2:11+\left(0{,}7:1\frac{3}{4}\right)\cdot(0{,}276:0{,}23)$.

831. а) $\left(14{,}05-1\frac{1}{4}\right):0{,}04-13{,}8\cdot 13$;

б) $\left(1{,}75:\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}:1{,}25\right)\cdot 6$;

в) $\left(2-\frac{1}{4}\cdot 0{,}8\right):\left(0{,}16:\frac{1}{2}+0{,}01\right)$;

г) $3\frac{3}{4}\cdot 12+(2{,}55+2{,}7):\left(0{,}1-\frac{1}{80}\right)$;

д) $\dfrac{\frac{5}{14}-\frac{8}{21}}{\frac{16}{21}-1}$;   е) $\dfrac{\frac{4}{15}+\frac{7}{12}}{\frac{23}{40}-1}$;

ж) $\dfrac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{7{,}5\cdot 3+3\cdot 2{,}5}$;   з) $\dfrac{8\frac{3}{5}+1\frac{1}{2}:1\frac{3}{4}+2\frac{2}{5}}{\frac{1}{7}\cdot 15{,}5-\frac{1}{7}\cdot 7{,}2}$;

и) $\left(5\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{8}-5\frac{1}{4}:7\right):3+3\frac{7}{28}$;

к) $\left(7\frac{1}{2}\cdot2\frac{2}{3}-12\frac{1}{4}:\frac{7}{9}\right):6+10\frac{1}{8}$.

832. а) $(173{,}5:15)\cdot63\cdot0{,}014-(173{,}5\cdot63\cdot0{,}014):15$;

б) $\left(\frac{21}{113}-\frac{14}{19}+\frac{7}{8}-\frac{28}{41}\right)+\left(\frac{4}{41}-\frac{1}{8}+\frac{2}{19}-\frac{3}{113}\right):\frac{1}{7}$;

в) $\frac{10}{21}\cdot2{,}1-3{,}04:\frac{76}{25}+20{,}02\cdot\frac{50}{1001}-125{,}125:\frac{1001}{8}$;

г) $3\cdot(0{,}1)^2+3:100+3\cdot\frac{1}{100}-3\cdot0{,}01-3:10^2-3:100$;

д) $\left(0{,}5-\frac{1}{3}+0{,}25-\frac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{7}{13}$;

е) $0{,}4+0{,}8\left(5-0{,}8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}$.

833. Сравните значения числовых выражений:

а) $(-0{,}2)^3\cdot10^5$ и $\left(-\frac{6}{10}\right)^2$; б) $1{,}2^2$ и $1{,}(4)$;

в) $2{,}(5)$ и $\left(3\frac{2}{9}+1\frac{8}{9}\right)\cdot\frac{1}{2}$; г) $(-0{,}5)^2\cdot(-5)^3$ и $31{,}(3)$;

д) $9^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5$ и $0{,}333$; е) $16^2\cdot8^3\cdot0{,}25^8$ и 2.

834. Вычислите:

а) $\dfrac{\left(10\frac{3}{7}-4\frac{5}{9}-5\frac{8}{21}\right)\cdot6{,}3+0{,}02}{20}$;

б) $\dfrac{3:0{,}25+204:5}{7{,}62\cdot0{,}25-0{,}918:3{,}6}$;

в) $\dfrac{36\frac{2}{3}:15+8\frac{2}{3}\cdot7}{12\frac{1}{3}+8\frac{6}{7}:2\frac{4}{7}}$; г) $\dfrac{2\frac{3}{8}:\frac{3}{4}-24\cdot\frac{7}{9}}{7\frac{2}{3}+2:24}$.

835. Запишите произведение в виде степени:

а) $2\cdot2\cdot2\cdot2$; б) $2\cdot2\cdot2^2\cdot2$;

в) $3\cdot3^2\cdot3$; г) $2^2\cdot2^3\cdot2^3\cdot2^2$.

Сравните значения числовых выражений (**836**—**837**):

836. а) $(2^4)^2$ и $2^{4\cdot2}$; б) $(3^2)^2$ и $3^{2\cdot2}$;

в) $(5^2)^4$ и $5^{2\cdot4}$; г) $(4^3)^2$ и $4^{3\cdot2}$;

д) $(2\cdot5)^2$ и 10^2; е) $(2\cdot5)^3$ и 10^4;

ж) $(3\cdot4)^3$ и $3^3\cdot4^3$; з) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ и $\frac{1^2}{2^2}$;

и) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ и $\frac{3^2}{4^2}$; к) $\left(4\frac{1}{2}\right)^2$ и $\frac{0}{2}$.

837. а) 4^8 и 8^6; б) 14^4 и 2^{16};

в) 10^{20} и 20^{10}; г) 10^{20} и 90^{10};

д) $0{,}5^{10}$ и $0{,}5^{20}$; е) $0{,}1^{10}$ и $0{,}3^{20}$.

838. Справедливы ли равенства (n и k — натуральные числа):
а) $(a^k)^n = (a^n)^k$; б) $n^k = k^n$?

839. Вычислите:
а) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 4^5$; б) $(-3)^{16} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^7$;
в) $\frac{4^{20}}{8^{13}}$; г) $\frac{2^{10} \cdot 25^4}{4\,000\,000}$.

840. а) Парсек (единица длины, принятая в астрономии) равен 30 860 000 000 000 км. Запишите это число с помощью степени числа 10.
б) Если разрезать кубический метр на кубические сантиметры и поставить их друг на друга, то какой высоты получится столб?

841. Между единицами энергии существует следующая зависимость: 1 джоуль равен 10^7 эргам, а 1 киловатт-час равен $3{,}6 \cdot 10^6$ джоулям. Выразите 1 киловатт-час в эргах.

842. В одном грамме воды содержится $3{,}35 \cdot 10^{22}$ молекул. Сколько цифр в этом числе?

Вычислите (**843**—**844**):

843. а) $\frac{2{,}1 \cdot 10^4 + 0{,}9 \cdot 10^4}{1{,}8 \cdot 10^3}$; б) $\frac{0{,}8 \cdot 10^6 - 0{,}3 \cdot 10^6}{1{,}5 \cdot 10^5}$.

844. а) $\frac{2 \cdot 3^{20} - 5 \cdot 3^{19}}{9^9}$; б) $\frac{(3 \cdot 2^{20} + 7 \cdot 2^{19}) \cdot 52}{(13 \cdot 8^4)^2}$;
в) $\frac{(3^{15} + 3^{14}) \cdot 2^9}{(3^{14} + 3^{12}) \cdot 1024}$; г) $\frac{25 \cdot (180 \cdot 6^7 - 108 \cdot 6^6)}{216^3 - 36^4}$;
д) $\frac{(12{,}4^2 - 4 \cdot 2^2) \cdot 0{,}49}{0{,}5^3 - 0{,}3^3}$; е) $\frac{0{,}8^3 + 0{,}3^3}{(7{,}5^2 - 3{,}1^2) \cdot 0{,}049}$;
ж) $\frac{14^2 - 15^2 + 6^2}{12^2 - 13^2 + 15^2}$; з) $\frac{19^2 - 2 \cdot 19 \cdot 18 + 18^2}{0{,}7^3 - 0{,}9^3}$.

845. Равны ли одночлены:
а) $3ab \cdot (-2)\,a$ и $6a^2b$;
б) $ax^2 \cdot 3a^2xy$ и $3a^3x^3y$;
в) $\frac{1}{2}\,a^2bc \cdot (-2)\,ab^3c^2$ и $\frac{1}{4}\,a^2b^4c^4$;
г) $-\frac{7}{8}\,ax^2y^2c \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right) a^2xyc^2$ и $1\frac{1}{3}\,a^3x^4y^3c^2$?

846. Найдите одночлен, равный произведению одночленов:
а) $3a^2b^3c \cdot 6a^3bc^2$;
б) $7bc^4e^2 \cdot 14b^2c^5e$;
в) $8c^2e^3k \cdot 12c^2ek$;
г) $(-16)\,e^2k^4p^3 \cdot 8e^2k^3p$;
д) $(-14)\,a^3bc^2 \cdot 4ab^2c^2$;
е) $7k^2p^2x^3 \cdot (-23)\,k^2p^4x^2$;

ж) $\frac{2}{3}p^3x^3y^2\cdot 2\frac{1}{2}pxy^2$;

з) $\left(-\frac{4}{7}\right)ace^2\cdot 1\frac{1}{6}a^2c^2e^2$;

и) $\left(-2\frac{1}{5}\right)ae^2k^2\cdot\left(-1\frac{9}{11}\right)a^2ek$;

к) $\left(-1\frac{1}{4}\right)a^3kp^2\cdot\frac{8}{5}ak^2p$.

Вместо звездочки подберите такой одночлен, чтобы получилось верное алгебраическое равенство **(847—848)**:

847. а) $2a^2b\cdot * = 14a^5b^2$;

б) $14a^2c^3\cdot * = 42a^6c^5$;

в) $*\cdot 17b^3c^4 = 85b^4c^7$;

г) $*\cdot 11a^3e^2 = 88a^5e^9$;

д) $23c^2e^2\cdot * = 92c^6e^7$;

е) $56be^5\cdot * = 1344b^3e^7$;

ж) $42p^2y^3\cdot * = 168p^6y^5$;

з) $14a^2c^3\cdot * = 182a^2c^7$.

848. а) $4ab^2+12ab^2+ * = 11ab^2$;

б) $12a^2b^3+7a^2b^3+ * = a^2b^3$;

в) $15b^2c^4+ * +2b^2c^4 = 22b^2c^4$;

г) $13c^2e^3+ * = 0$;

д) $-12e^3k+ * = -e^3k$;

е) $13kp-7kp+ * = 12kp$;

ж) $3{,}6px^3+ * -2{,}1px^3 = 16px^3$;

з) $10{,}2x^2y-7{,}6x^2y+ * = 3{,}4px^2y$.

849. На рисунке 17 квадрат разбит на прямоугольники. Найдите площади прямоугольников.

850. Вычислите длину окружности радиуса 2 см с точностью до второго знака после запятой.

851. Вычислите площадь круга радиуса 3 см с точностью до первого знака после запятой.

852. Длина пути S при равномерном прямолинейном движении вычисляется по формуле $S=v\cdot t$, где v — скорость, а t — время движения.

а) Выразите v через S и t. Вычислите v при $S=20$ км, $t=2$ ч.

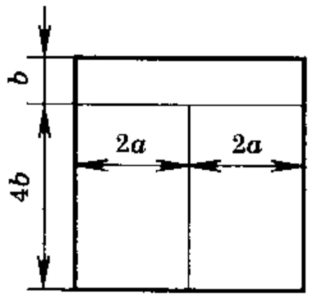


Рис. 17

б) Выразите t через S и v. Вычислите t при $S=1200$ м, $v=20$ км/ч.

853. Площадь прямоугольника S вычисляется по формуле $S=ab$, где a и b — стороны этого прямоугольника.

а) Выразите a через S и b. Вычислите a при $S=400$ см^2 и $b=0,2$ м.

б) Выразите b через S и a. Вычислите b при $S=1,6$ км^2 и $a=20$ м.

854. а) Из формулы $S=\pi r^2$ выразите π через S и r.

б) Из формулы $C=2\pi r$ выразите r через C и π.

855. Запишите длину пути, пройденного автомобилем (движение считать равномерным), если:

а) скорость равна 10 м/с, время t с;

б) скорость равна v м/с, время 5 с.

856. Запишите объем прямоугольного параллелепипеда, если длины его ребер:

а) 4 см, b см, c см; б) a см, b см, 2 см.

857. Каким свойством обладает число, заданное выражением (n — натуральное число):

а) $2n$; б) $2n+1$; в) $2n-1$;
г) $3n$; д) $3n+1$; е) $3n-1$?

858. Запишите алгебраическое выражение, которое задает:

а) натуральные числа, делящиеся нацело на 3;

б) натуральные числа, дающие при делении на 3 остаток 1;

в) натуральные числа, дающие при делении на 3 остаток 2;

г) натуральные числа, делящиеся нацело на 7.

859. Покажите, что сумма:

а) двух четных чисел есть число четное;

б) двух нечетных чисел есть число четное;

в) четного и нечетного числа есть число нечетное.

860. Покажите, что сумма:

а) трех последовательных (т. е. чисел, следующих друг за другом, например 2, 3, 4) целых чисел делится на 3;

б) пяти последовательных целых чисел делится на 5.

861. а) Напишите четыре последовательных целых числа, последнее из которых $(x+1)$, и найдите их сумму.

б) Напишите три последовательных целых числа, первое из которых $(2a-1)$, и найдите их сумму.

Запишите (**862—863**):

862. а) Произведение куба a на восьмую степень b;

б) минус утроенное произведение a на куб b;

в) половину произведения седьмой степени a и пятой степени b;

г) сумму квадрата a и утроенного b;

д) квадрат разности a и b;

е) куб разности a и b.

863. а) Квадрат x;
б) сумму квадратов x и y;
в) сумму удвоенного произведения a и b и квадрата b;
г) квадрат суммы a и b;
д) сумму квадрата a и удвоенного произведения a и b;
е) разность квадратов m и n;
ж) произведение суммы x и y и разности x и y;
з) произведение разности a и b и квадрата b.

864. Приведите подобные члены:

а) $3a+8a-a$; б) $2x-7x+3x$;
в) $5y-15y-8y$; г) $-2a-3a+8a$;
д) $b-7b+3b-5b-2b$; е) $2x-11x-2x+13x-7x$;
ж) $ab-3ab-ab-ab$; з) $-xy-7xy+xy$;
и) $3m^2n-m^2n-2m^2n$; к) $-ax^2-6ax^2-2ax^2$.

865. Упростите выражение:

а) $4aab-5ba^2+7a^2b-aba$;
б) $25aa^2b^3+2a^3b\cdot 5b^2-a^2b^2\cdot 8ab-9a^3b^3+8aa^2b^3$;
в) $3pq-(p+q)^2$; г) $7a^2-(5a^2-6m^3)$;
д) $x+(y-(x-y))$; е) $x-((y-x)-y)$;
ж) $(4a^2-5b^2)(5a^2-4b^2)$;
з) $(7ab^2+3b^3)(2ab^3-4a^2)$;
и) $(a^2+3ab-2b^2)(2a^2-3b)$;
к) $(3x^2-4x+7)(5x^2-x)$.

866. Подберите одночлены A и B так, чтобы выполнялось алгебраическое равенство:

а) $2a^2b^4-4a^3b^2=A\cdot(b^2-2a)$;
б) $A-4x^2y^4=2x^2y^2(3x-B)$;
в) $10mn^4+A=5mn^2\cdot(B+3n)$;
г) $(x-2)(x+3)=x^2+A-2x-B$;
д) $(a-A)(B-1)=a^2-a-ab+b$;
е) $(A+B)(p+q)=p^2+pq+pq+q^2$.

867. Преобразуйте выражение так, чтобы изменился знак, стоящий перед выражением:

а) $(2x-3)$; б) $-(m-3n)$;
в) $-(-2p+3q)$; г) $(-a-2b)$.

868. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(a+b+c)^2$; б) $(x+y-z)^2$;
в) $(m+n+k)^2$; г) $(a-b-c)^2$;
д) $(p+x+c+d)^2$; е) $(a+m-k-q)^2$.

869. Упростите выражение:

а) $(2x+y-3z)^2-(x-2y+2z)^2$;
б) $(m-4n+5z)^2-(3m-n-3k)^2$;
в) $(4-2p+q^2)^2-(3p^2-5q+7)^2$;
г) $(a+b+c)^2+(a-b-c)^2+(b-a-c)^2+(c-a-b)^2$.

870. Покажите, что если к целому числу прибавить его квадрат, то полученная сумма будет четным числом.

871. Многочлен $a^2-ab-b+b^2$ представьте в виде суммы двух двучленов, один из которых a^2-b.

872. Многочлен $3a+5ab-2b^2-b$ представьте в виде разности двух многочленов, один из которых $3a-b$.

873. Данное выражение представьте в виде суммы четырех слагаемых:

а) $2a$; б) $3a-8$; в) a^2; г) -1.

874°. Вместо звездочки подберите одночлен так, чтобы выполнялось алгебраическое равенство:

а) $6a+4b=*(3a+2b)$;

б) $10x-15y=*(2x-3y)$;

в) $6x-6=*(1-x)$;

г) $a^2-\frac{1}{4}b^2=*(b^2-4a^2)$.

875. Разложите на множители многочлен:

а) $4x^2-9$; б) x^4-1;
в) x^6-1; г) x^2-1;
д) x^8-4x^4+4; е) $9x^6+6x^3+1$.

876. Вычислите:

а) 60^2-10^2; б) 120^2-80^2;
в) 38^2-12^2; г) 63^2-17^2;
д) 15^2-25^2; е) 19^2-29^2;
ж) 64^2-7^2; з) $144-11^2$;
и) $13^2-9\cdot25$.

877. Вычислите наиболее простым способом:

а) $\frac{65^2-32^2-97\cdot11}{61^2-36^2}+\frac{56^2-26^2}{66^2-16^2}$;

б) $\frac{109^2+160\cdot32-51^2}{139^2-11^2}+\frac{42^2-36}{84^2-12^2}$;

в) $\frac{1}{2}+\frac{53^2-27^2}{31^2-25}-\frac{53^2-27^2}{58^2-22^2}$;

г) $\frac{77^3-69^3}{70^2-62^2}-\frac{77^3+41^3}{125^2-49}-\frac{1}{2}$.

878. Вычислите:

а) $\frac{(9{,}126:0{,}65+0{,}46)\cdot7{,}18-1{,}45\cdot28{,}2}{3{,}45^2-0{,}55^2}$;

б) $\frac{3{,}05^2-2{,}55^2}{0{,}35\cdot388-28{,}8\cdot(20{,}56-14{,}501:0{,}85)}$;

в) $\frac{\left(3\frac{9}{20}+1\frac{1}{6}\right):27{,}7+5\frac{1}{7}\cdot3{,}85-14\frac{3}{20}}{\left(1{,}75:\frac{2}{3}-1{,}75:1\frac{1}{8}\right):\frac{7}{12}}$.

879*. Разложите выражение на множители:

а) $bc(b+c)+ac(c-a)-ab(a+b)$;

б) $a^2b^2(b-a)+b^2c^2(c-b)+c^2a^2(a-c)$;

в) x^3+5x^2+3x-9.

880. Вместо A, B и C подберите одночлены так, чтобы выполнялось алгебраическое равенство:

а) $2x^2+7x-15=(2x-3)(x+A)$;

б) $(8-2x)(4-x)=A-16x+32$;

в) $(3a^2-b)(4b-a^2)=-3a^4+A-4b^2$;

г) $(4x^2y^2+A)^2=B+C+0{,}01y^8$;

д) $(8a^4b^3-A)^2=B-C+0{,}16b^4$.

881. Докажите алгебраическое равенство:

а) $\frac{1}{2}(m+n)^2+\frac{1}{2}(m-n)^2=m^2+n^2$;

б) $\left(\frac{1}{2}(m+n)\right)^2-\left(\frac{1}{2}(m-n)\right)^2=mn$;

в) $(7b-5c)^2(b+2c)-b((7b+2c)^2-119c^2)=50c^3$;

г) $(3a-2x)^2(a+3x)-((a-x)(a^2+16ax-16x^2)-4x^3)=8a^3$;

д) $c(8c+3a)^2-((8c-a)^2(c+a)+24a^2c)=-a^3$;

е) $(a+b)^3-3ab(a+b)=a^3+b^3$;

ж) $(x-y)^3+3xy(x-y)=x^3-y^3$;

з) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

882*. Разложите многочлен на множители:

а) $m^3-5m^2-4m+20$; б) $4ay-3ay^2+3xy^2-4xy$;

в) $4b^2x-6x-24b^2y+36y$;

г) $2ma+mb-mc-2na-nb+nc$;

д) k^4+k^2-20; е) m^3-3m+2;

ж) $y^4-y^2(z^2+1)+z^2$; з) $c^2+cd+c-2d^2+2d$.

883. Найдите значение выражения:

а) $(3x-2y)^2-(2x-y)^2$ при $x=2{,}35$; $y=-1{,}65$;

б) $(2m-n)^2+(m+2n)^2$ при $m=3{,}2$; $n=-3{,}4$;

в) $(6a-1)^2-((10a+3)(10a-3)-(8a+1)^2)$ при $a=-0{,}05$;

г) $((k+4)^2-(k+3)^2)^2-4(k-3)(k+10)$ при $k=1{,}375$;

д) $5mn(m+5n)-9n^3-(4mn^2-(m+n)(5m-3n)^2)$ при $m=-0{,}2$; $n=\frac{1}{2}$;

е) $(x-2y)(4x-3y)^2-(57xy-2y)(28x^2+9y^2)$ при $x=-0{,}5$; $y=\frac{1}{19}$;

ж) $(4a-3b)^2(b-a)-(9b^2-a(4a-5b)^2)$ при $a=-0{,}4$; $b=\frac{1}{2}$;

з) $(2x-9y)^2(x+y)-(y(9y+2{,}5x)^2+x^2(4x+1{,}75y))$ при $x=-5$; $y=0{,}1$.

884. Докажите, что при любом целом n выражение:

а) $(n-2)^3-(n(3+(n-3)^2)-10)$ равно 2;

б) $(5+3n)^2(4-n)-n(96-(3n-1)^2)$ равно 100;

в) $(6n+7)^2-2(n-3)(6n+7)+(n-3)^2$ кратно 5;

г) $(2n+7)^2-2(2n+7)(2n-3)+(2n-3)^2$ кратно 10.

885*. Докажите, что:

а) квадрат нечетного натурального числа есть число нечетное;

б) при $A=m-1$ выражение A^2+A+m является полным квадратом;

в) для любого целого n произведение $n(n+1)(2n+1)$ делится на 6;

г) сумма двух последовательных нечетных чисел делится на 4;

д) разность квадратов двух любых нечетных чисел делится на 4;

е) квадрат нечетного числа, уменьшенный на единицу, делится на 8;

ж) разность куба натурального числа и самого числа делится на 6.

886. Зная, что x^3-x (где x — целое число) делится на 6, докажите, что выражения x^3-7x, x^3+11x, $5x^3+13x-30$ делятся на 6.

887. При каких значениях букв данное выражение равно нулю:

а) $3b$; б) $2(a+1)$; в) xy;

г) $m(n-1)$; д) $(x-3)(x-2)$; е) $(2-y)(y+3)$;

ж) $(x-5)^2$; з) $(m+2)^2$?

888. При каких значениях букв данная дробь равна нулю:

а) $\frac{x}{x^2+2}$; б) $\frac{6m}{m-8}$; в) $\frac{a-4}{a+1}$;

г) $\frac{2y-5}{y^2}$; д) $\frac{3x+7}{2x-5}$; е) $\frac{6-9x}{5+4x}$?

889. При каких значениях x данное выражение принимает наименьшее значение:

а) x^2; б) $(x-1)^2$; в) $(8+x)^2$; г) $(x-1)^2$?

890. При каких значениях m данное выражение принимает наибольшее значение:

а) $\frac{1}{m^2+1}$; б) $\frac{5}{6+m^2}$?

891. Французский математик Андриен Мари Лежандр предложил такую формулу простых чисел: $p=2x^2+29$. Сколько простых чисел дает эта формула при подстановке в нее последовательных целых значений x, начиная с -28? Выполните вычисления до получения первого составного числа.

892. Из формулы простых чисел Лежандра можно получить новые формулы простых чисел, дающие тот же список простых чисел. Подставим в многочлен $2x^2+29$ вместо x выражение $x-1$:

$$2(x-1)^2+29=2(x^2-2x+1)+29=$$
$$=2x^2-4x+2+29=2x^2-4x+31.$$

Новая формула даст простые числа для последовательных значений x, начиная не с -28 (см. задачу 891), а с -27.

Получите таким же способом формулу простых чисел для последовательных значений x, начиная с 1.

893. Докажите, что при любых целых значениях a и b найдется такое целое значение x, что многочлен $ax^2+bx+29$ будет составным числом.

894. Докажите, что для любого целого числа x значение многочлена:

а) x^2+x четное число; б) x^3-x делится на 3.

895*. Докажите, что произведение четырех последовательных натуральных чисел, увеличенное на 1, есть точный квадрат.

896. Верно ли, что если x целое и $5x+9$ делится на 17, то выражение $10x+1$ тоже делится на 17?

897. Докажите, что если при некоторых целых a и b выражение $4a-5b$ делится на 13, то выражение $8a-23b$ тоже делится на 13.

898. Докажите, что если выражение $3a+4b+5c$, где a, b и c — целые числа, делится на 11, то и $9a+b+4c$ делится на 11.

899. Докажите, что:

а) $7^{10}-7^9-7^8$ делится на 41;

б) $9^{100}-9^{99}+9^{98}-9^{97}$ делится на 41.

900. Докажите, что сумма трех последовательных степеней числа 2 делится на 7.

901. а) Докажите, что $(n+1)!-n\cdot n!=n!$;

б) вычислите: $11!-(1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+10\cdot 10!)$.

902. Упростите выражение:

а) $(x-1)(x+1)$; б) $(x-1)(x^2+x+1)$;

в) $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$.

903. Разложите на множители двучлен:

а) x^5-1; б) x^6-1.

904*. Докажите, что если при некоторых целых x и y выражение $x^2+9xy+y^2$ делится на 11, то и x^2-y^2 делится на 11.

905. а) Числа p и q взаимно простые. Будут ли взаимно простыми числа $(p+q)$ и pq?

б) Дробь $\frac{p}{q}$ несократима. Будет ли несократимой дробь $\frac{p}{p+q}$?

906. Вместо A, B и C подберите целые выражения так, чтобы равенство было верным, и упростите полученную дробь:

а) $\frac{a-1}{a+1}+\frac{a+1}{a-1}=\frac{(a-1)(a-1)+(a+1)(a+1)}{A}$;

б) $\frac{m}{3m-1}+\frac{2m}{5-2m}=\frac{m(5-2m)+2m(3m-1)}{A}$;

в) $\frac{B}{x+2}-\frac{C}{x-1}=\frac{(x-1)(x-1)+3x(x+2)}{A}$;

г) $\frac{B}{p-q}-\frac{C}{p^2-q^2}=\frac{(p+q)(p+q)-2pq}{A}$.

907. Упростите выражение:

а) $\frac{x^5}{x^2-6x+9}\cdot\frac{x^2-9}{x^3+3x^2}-\frac{3x^5+81x^2}{x^2}:(x^2-9)$;

б) $\frac{a^2}{a^2+4a+4}\cdot\frac{a^2-4}{a^3-2a^2}+\frac{a^5-8a^2}{a}:(a^2-4)$;

в) $\left(\frac{m+2}{8-8m+2m^2}+\frac{1}{4-2m}-\frac{2}{m^2-4m+4}\right)\cdot 3m-3m$;

г) $\left(\frac{2}{a^2-4a+4}-\frac{1}{4-2a}-\frac{a+2}{2(2-a)^2}\right)\cdot 5a-5a$;

д) $\left(\frac{1}{2-4c}+\frac{1+c}{8c^3-1}:\frac{1+2c}{4c^2+2c+1}\right)\cdot\frac{4c-2}{2c+1}-\frac{1}{(1+2c)^2}$;

е) $\left(\frac{1}{2-4b}+\frac{b+1}{8b^3-1}\cdot\frac{4b^2+2b+1}{1+2b}\right):\frac{2b+1}{4b-2}-\frac{1}{(2b+1)^2}$.

908. Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{x-2}{x^2-2x+4}-\frac{6x-13}{x^3+8}\right):\frac{15-5x}{2x^3+16}$ при $x=3{,}5$;

б) $\left(\frac{x-1}{x^2-x+1}+\frac{4x+5}{x^3+1}\right):\frac{2-x}{4x^2-4x+4}$ при $x=0{,}6$;

в) $\frac{8a^3-27b^3}{(3b+2a)^2-6ab}$ при $a=2{,}5$; $b=-1\frac{2}{3}$;

г) $\frac{64a^3+8b^3}{(2a-b)^2+2ab}$ при $a=-0{,}25$; $b=1\frac{7}{8}$.

909. Докажите алгебраическое равенство:

а) $\left(\frac{m^2+2m}{4m^2-n^2}-\frac{1}{2m+n}\right):\frac{m^2+n}{20m^2+10mn}+\frac{5n}{n-2m}=5$;

б) $\frac{5a}{5a+3b}+\left(\frac{5a+3b}{5a-3b}-\frac{25a^2}{25a^2-9b^2}\right)\cdot\frac{5a-3b}{10a+3b}=1$;

в) $\left(\frac{2a}{a^2-16}-\frac{4}{4+a}\right)\cdot\frac{a+4}{8-a}+\frac{a^2}{32-8a}=-\frac{a+4}{8}$;

г) $\frac{1}{x}\left(\frac{y^2-xy}{x+y}\right)^2\left(\frac{x+y}{(x-y)^2}+\frac{x+y}{xy-y^2}\right)+\frac{x}{x+y}=1;$

д) $\frac{m}{m^2-2m+1}-\frac{1}{1-m}\cdot\frac{m}{m+1}-\frac{2}{m+1}=\frac{m}{(m-1)^2}-\frac{m-2}{m^2-1};$

е) $\left(\frac{a}{b^2+ab}-\frac{a-b}{a^2+ab}\right):\left(\frac{b^2}{a^3-ab^2}+\frac{1}{a+b}\right)=\frac{a}{b}-1.$

910. Преобразуйте данные дроби в сумму дробей, *например*: $\frac{3x^2-8x+4}{x}=\frac{3x^2}{x}-\frac{8x}{x}+\frac{4}{x}=3x-8+\frac{4}{x}.$

а) $\frac{m+n}{3}$; б) $\frac{x-2}{5}$; в) $\frac{1-2x}{x}$;

г) $\frac{3a-8b}{ab}$; д) $\frac{x^2-2x}{x^3}$; е) $\frac{4y-9y^2}{12y}$;

ж) $\frac{5x^3+2x^2-x-8}{2x}$; з) $\frac{x^2-5x+6}{x-2}$;

и) $\frac{12-7x+x^2}{x-4}$; к) $\frac{12m^4-9m^2+m-6}{3m^2}$.

911. Сократите дробь:

а) $\frac{8a^2c+16abc-4ac^2}{6bc^2-12abc-24b^2c}$;

б) $\frac{30m^2k-70mnk-40mk^2}{56n^2k+32nk^2-24mnk}$;

в) $\frac{15a^3bc-30a^2b^2c+15ab^3c}{12a^3c^2-12ab^2c^2}$;

г) $\frac{80m^2n^3k^2-20m^4nk^2}{16m^3nk^2-64m^2n^2k^2+64mn^3k^2}$.

Упростите выражение **(912—914)**:

912. а) $\frac{a+\frac{1}{b}}{a-\frac{1}{b}}$; б) $\frac{m-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{m}}$; в) $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$;

г) $\frac{\frac{a}{b}-\frac{m}{n}}{\frac{a}{b}+\frac{m}{n}}$; д) $\frac{\frac{a+b}{a-b}}{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}$; е) $\frac{\frac{1}{1-m}+\frac{1}{1+m}}{\frac{1}{1-m}-\frac{1}{1+m}}$;

ж) $\frac{\frac{c}{c-1}-\frac{c+1}{c}}{\frac{c}{c+1}-\frac{c-1}{c}}$; з) $\frac{\frac{p-q}{p+q}+\frac{p+q}{p-q}}{\frac{p}{q}+\frac{q}{p}}$.

913. а) $\frac{x}{x-2y}+\frac{y}{x+2y}+\frac{x^2+3xy-2y^2}{4y^2-x^2}$;

б) $\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^5-1}-\frac{x^2-x+1}{x^3+1}$.

914. а) $\dfrac{ba^2}{(1-a)^2} - \dfrac{b}{(a-1)^2}$; б) $\dfrac{2a}{(a-1)^3} + \dfrac{1+a^2}{(1-a)^3}$.

915. Известно, что $x+\dfrac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что:

а) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$; б) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ — целое число.

916. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$;

в) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$; г) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$.

917. Представьте в виде разности дробей:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2}$; б) $\dfrac{1}{3\cdot 4}$;

в) $\dfrac{1}{x(x+1)}$; г) $\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$.

918. Вычислите:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{9\cdot 10}$;

б) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{99\cdot 100}$;

в) $\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 8}+\ldots+\dfrac{1}{98\cdot 100}$.

919. Докажите, что при любом натуральном n:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}<1$;

б) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}<\dfrac{1}{2}$.

920. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$;

б) $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$;

в) $\dfrac{2}{x(x+2)}+\dfrac{2}{(x+2)(x+4)}$;

г) $\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+6)}$.

921*. В *«Арифметике» Диофанта (III в.)* содержится много тождеств. Докажите два из них, данные в современной записи:

а) $\dfrac{144}{x^4-60x^2+900}\cdot 30+\dfrac{60}{x^2-30}=\dfrac{60x^2+2520}{x^4-60x^2+900}$;

б) $\dfrac{96}{x^4-12x^2+36}-\dfrac{12}{6-x^2}=\dfrac{12x^2+24}{x^4-12x^2+36}$.

922*. Докажите *тождество Л. Эйлера*:

$$a^3+b^3+\left(\frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}\right)^3=\left(\frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}\right)^3.$$

923. Зарплату в b рублей повысили на 40%. Какова теперь зарплата, если:

а) $b=1500$; б) $b=1400$?

924. На распродаже товаров цены будут снижены на 25%. Сколько будет стоить товар, цена которого сейчас a рублей, если:

а) $a=5000$; б) $a=12\,000$?

925. Сколько процентов числа a составляет число b, если:

а) $a=40$, $b=50$; б) $a=50$, $b=40$?

926. Увеличьте число a на p%, уменьшите число a на p%, если:

а) $a=40$, $p=10$; б) $a=50$, $p=50$.

927. Увеличьте число a на p%. Полученное число увеличьте еще раз на p%, если:

а) $a=400$, $p=20$; б) $a=200$, $p=30$.

928. Торговец получил товар по оптовой цене a рублей, увеличил цену на 20%. Для проверки он уменьшил новую цену на 20% и удивился, так как не получил прежнего результата. Должен ли получиться прежний результат?

929. Увеличьте положительное число a на p%. Полученное число уменьшите на p%. Получится ли снова число a? Почему?

930. На сколько процентов число a больше числа b, если:

а) $a=50$, $b=40$; б) $a=80$, $b=40$?

931. Торговец купил товар за a рублей, продал его дороже за b рублей. Какова прибыль торговца в процентах, если:

а) $a=8$, $b=10$; б) $a=6$, $b=7{,}2$?

932. Торговец купил товар за a рублей, продал его дешевле — за b рублей. Каков убыток торговца в процентах, если:

а) $a=8$, $b=7$; б) $a=6$, $b=5{,}1$?

933. Банк начисляет p% на вложенную сумму ежемесячно. На сколько процентов увеличится сумма за год? Ответ округлите до целых с недостатком, если:

а) $p=4$; б) $p=5$.

934. На сколько процентов число b меньше числа a, если:

а) $a=50$, $b=40$; б) $a=80$, $b=40$?

935. Число увеличили на p%. Во сколько раз увеличили число, если:

а) $p=50$; б) $p=100$?

936. Число увеличили в n раз. На сколько процентов увеличили число, если:

а) $n=1{,}3$; б) $n=3$?

937. Число уменьшили на $p\%$. Во сколько раз уменьшили число, если:

а) $p=20$; б) $p=60$?

938. Число уменьшили в n раз. На сколько процентов уменьшили число, если:

а) $n=5$; б) $n=2$?

939*. Мальчики составляют 45% всех учащихся в школе. Известно, что 30% всех мальчиков и 40% всех девочек учатся без троек. Сколько процентов всех учащихся школы учатся без троек?

940*. В некотором царстве, в некотором государстве правительство приняло постановление о запрете рекламы спиртных напитков. Это постановление поддержало 69% всего взрослого населения, причем среди женщин 94%, а среди мужчин — 41%. Определите, кого в этом царстве-государстве больше: мужчин или женщин?

941. Число уменьшили на $p\%$, полученное число уменьшили еще раз на $q\%$. На сколько процентов уменьшили число, если:

а) $p=20$, $q=20$; б) $p=30$, $q=40$?

942. Трава при сушке теряет $p\%$ своей массы. Сколько сена получится из m т свежей травы, если:

а) $p=80$, $m=6$; б) $p=75$, $m=8$?

943. Виноград при сушке теряет $p\%$ своей массы. Сколько свежего винограда нужно взять, чтобы получить n кг изюма (сушеного винограда), если:

а) $p=75$, $n=3$; б) $p=80$, $n=5$?

944*. На некотором участке пути машинист уменьшил скорость поезда на $p\%$. На сколько процентов увеличится время движения на этом участке?

945*. Яблоки содержат $p\%$ воды, после сушки они содержат $q\%$ воды. Сколько сушеных яблок получится из m кг свежих, если:

а) $p=70$, $m=30$, $q=40$; б) $p=65$, $m=80$, $q=20$?

946*. Груши содержат $p\%$ воды, после сушки они содержат $q\%$ воды. Сколько свежих груш надо взять для получения n кг сушеных, если:

а) $p=70$, $n=36$, $q=20$; б) $p=65$, $n=35$, $q=25$?

947*. Яблоки, содержащие $p\%$ воды, при сушке потеряли $q\%$ своей массы. Сколько процентов воды содержат сушеные яблоки, если:

а) $p=66$, $q=60$; б) $p=64$, $q=55$?

948*. До просушки влажность зерна составляла $p\%$, а после просушки составила $q\%$. Сколько процентов потеряло зерно в массе, если:

а) $p=19$, $q=10$; б) $p=23$, $q=12$?

949*. В некотором царстве, в некотором государстве правительство решило осуществить одну из двух мер: поднять зарплату всем гражданам на 20% или понизить цены на все товары на 20%.

а) Какая из двух мер выгоднее гражданам этого государства?

б) На сколько процентов повысилась бы покупательная способность граждан при одновременном введении этих мер?

950. Рядовой Степанов почистил бак картошки за 4 ч, и у него 20% всей картошки ушло в очистки. За сколько часов он начистит такой же (по массе) бак картошки?

951. Рядовой Кузнецов начистил бак картошки за 4 ч, и у него 20% всей картошки ушло в очистки. За сколько часов он почистит такой же (по массе) бак картошки?

952. Рядовой Смирнов может почистить бак картошки за 3 ч, а начистит такой же (по массе) бак картошки за 4 ч. Сколько процентов картошки идет у него в очистки?

953. Рядовой Иванов может почистить котел картошки за 4 ч, а рядовой Петров — за 6 ч. У рядового Иванова 10% картошки идет в очистки, а у рядового Петрова — 15%. Однажды они сели вместе чистить котел картошки. Сколько процентов картошки уйдет в очистки при совместной работе?

954. *Старинная задача.* Взрослому работнику платят в неделю a рублей, а мальчику на b рублей меньше. Сколько заработали они вместе, если первый работал a недель, а второй — b недель, если:

а) $a=5$, $b=3$; б) $a=6$, $b=4$?

955. *Старинная задача.* Купец купил b пудов товара за c рублей, а продал каждый пуд за a рублей. Сколько прибыли он получил, если:

а) $a=3$, $b=20$, $c=50$; б) $a=0{,}84$, $b=25$, $c=18{,}6$?

956. Поезд за t ч проходит S км. Какой путь прошел бы поезд за то же время при скорости, большей первоначальной на a км/ч, если:

а) $a=10$, $S=210$, $t=3$; б) $a=20$, $S=240$, $t=4$?

957. Некто занял денег. Через месяц он вернул a рублей, еще через месяц b рублей, выплатив за 2 месяца $\frac{1}{n}$ всей суммы. Сколько денег он еще остался должен, если:

а) $a=5000$, $b=4000$, $n=5$; б) $a=8000$, $b=3000$, $n=7$?

958. Какой смысл имеет дробь $\frac{a}{b}$, если:

а) a — расстояние, b — время движения;
б) a — расстояние, b — скорость?

959. Пешеход прошел расстояние S км со скоростью v км/ч. Сколько это заняло времени в часах; в минутах?

960. Два пешехода отправляются одновременно из одного пункта в противоположных направлениях. Их скорости x км/ч и y км/ч.

а) Какое расстояние будет между ними через 2 ч?
б) Через сколько часов расстояние между ними будет S км?

961. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, удаленных на расстояние S км. Их скорости x км/ч и y км/ч. Через сколько часов они встретятся?

962. Два поезда одновременно вышли из одного пункта в противоположных направлениях, и через 2 ч расстояние между ними было S км. Скорость одного поезда v км/ч. Определите скорость другого.

963. Два поезда одновременно вышли из одного пункта в одном направлении и через 3 ч расстояние между ними было S км. Скорость одного поезда v км/ч. Определите скорость другого, если известно, что она:

а) больше v;   б) меньше v.

964. *Задача Ариабхаты (V—VI вв.).* Два светила находятся на данном расстоянии d друг от друга, движутся одно к другому с данными скоростями x и y. Определите точку их встречи (т. е. расстояние от места встречи до первоначального положения светил).

965. Из города вышел пешеход со скоростью a км/ч, через t ч вслед за ним вышел второй пешеход со скоростью b км/ч. Через сколько часов после своего выхода второй пешеход догонит первого, если:

а) $a=5,\ b=6,\ t=3$;
б) $a=4,\ b=6,\ t=4$?

966. Поезд из A в B шел t ч со скоростью v км/ч. За сколько часов он пройдет расстояние AB, если увеличит скорость на a км/ч, если:

а) $t=3,\ v=60,\ a=30$;
б) $t=4,\ v=75,\ a=25$?

967. Поезд прошел расстояние AB за t ч со скоростью v км/ч. С какой скоростью должен был бы идти поезд, чтобы прийти в B на a часов раньше, если:

а) $t=5$, $v=80$, $a=1$;
б) $t=6$, $v=60$, $a=2$?
в) Подберите другие значения t, v и a, при которых ответ выражается целым числом.

968. Некоторую работу a человек могут выполнить за c дней. За сколько дней эту работу могут выполнить b человек, если:

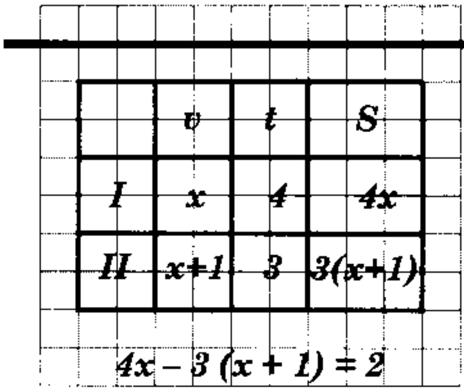
а) $a=12$, $b=15$, $c=30$;
б) $a=18$, $b=20$, $c=50$?

969. Некоторую работу a человек могут выполнить за c дней. За сколько дней эту работу выполнят такие же работники, если их будет на b человек меньше? Известно, что:

а) $a=30$, $b=10$, $c=28$;
б) $a=42$, $b=7$, $c=30$.

ГЛАВА III

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ



§ 9. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

9.1. Уравнения первой степени с одним неизвестным

Следующие уравнения

$$5x-3=0,$$
$$x+5=0,$$
$$-2x-7=0,$$
$$3x=0$$

могут служить *примерами* уравнений первой степени с одним неизвестным.

Выражение, записанное в уравнении слева от знака равенства, называют **левой частью уравнения**, а выражение, записанное справа, **правой частью уравнения**.

Теперь можно сказать, что уравнением первой степени с одним неизвестным x называют уравнение, левая часть которого есть многочлен стандартного вида первой степени относительно x, а правая — нуль.

Общий вид уравнения первой степени с одним неизвестным x таков:

$$kx+b=0 \qquad (k\neq 0),$$

где k и b — заданные числа. Число k называют **коэффициентом при неизвестном** в этом уравнении, а число b — **свободным членом** этого уравнения.

Так, в уравнении

$$5x-3=0$$

5 — коэффициент при неизвестном, а (-3) — свободный член, в уравнении

$$3x=0$$

3 — коэффициент при неизвестном, а 0 — свободный член.

Корнем (или решением) уравнения называют такое число, при подстановке которого в уравнение вместо x получается верное числовое равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни.

Чтобы решить общее уравнение первой степени

$$kx+b=0 \qquad (k\neq 0), \tag{1}$$

будем рассуждать так.

Предположим, что число x_0 есть корень уравнения (1).

Подставляя его в это уравнение, получим верное числовое равенство

$$kx_0+b=0. \tag{2}$$

Перенося число b с противоположным знаком в правую часть равенства (2), получим верное числовое равенство

$$kx_0=-b. \tag{3}$$

Разделив обе части равенства (3) на k, получим, что

$$x_0=-\frac{b}{k}.$$

Следовательно, равенство (2) справедливо для

$$x_0=-\frac{b}{k}.$$

Мы показали, что если x_0 — корень уравнения (1), то он равен числу $-\frac{b}{k}$.

Теперь надо проверить, что число $-\frac{b}{k}$ действительно корень уравнения (1). Для этого подставим $-\frac{b}{k}$ в уравнение (1) и получим верное равенство:

$$k\left(-\frac{b}{k}\right)+b=0.$$

Тем самым мы доказали, что уравнение (1) имеет единственный корень

$$x_0=-\frac{b}{k}.$$

Итак, для того, чтобы решить уравнение (1), надо:

1) перенести свободный член этого уравнения в правую часть, изменив при этом знак у числа b на противоположный;

2) разделить обе части полученного уравнения на коэффициент при неизвестном.

Тогда число, полученное в правой части последнего уравнения, и есть единственный корень уравнения (1).

970°. Что называют корнем уравнения с одним неизвестным?

971°. Что значит решить уравнение?

972. Какое уравнение называют уравнением первой степени с одним неизвестным? Приведите примеры.

973°. Сколько корней имеет уравнение первой степени с одним неизвестным?

974°. В уравнении $-3x+5=0$ назовите:

а) свободный член;

б) коэффициент при неизвестном.

975. Каков общий вид уравнения первой степени с неизвестным x?

976. Напишите три уравнения первой степени с одним неизвестным.

977. Является ли данное уравнение уравнением первой степени с одним неизвестным:

а) $4x-2=0$; б) $6x=0$;
в) $3+7x=0$; г) $0\cdot x=0$;
д) $21+4x=0$; е) $\frac{5}{3}x-\frac{8}{7}=0$;
ж) $4x=-5$; з) $(4{,}7-4-0{,}7)x-1=0$;
и) $0\cdot x-6=0$; к) $0=7x-2$?

978. Составьте уравнение первой степени с одним неизвестным, если:

а) $k=-3,\ b=5$; б) $k=2,\ b=0$;
в) $k=-1\frac{1}{4},\ b=7$; г) $k=\frac{1}{2},\ b=-10$;
д) $k=30,\ b=-20$; е) $b=7\frac{1}{2},\ k=-8$;
ж) $k=0{,}(3),\ b=0$; з) $b=-7{,}5,\ k=4$.

979. Какое из чисел 3; 0; -1 является корнем уравнения $2x+2=0$?

980. Является ли число $\frac{1}{2}$ корнем уравнения:

а) $5x-8=0$; б) $4x-8=0$;
в) $8x-4=0$; г) $1{,}3x-0{,}65=0$;
д) $7\frac{1}{4}x-3{,}5=0$; е) $\frac{1}{2}x=0$?

981. Решите уравнение:

а) $3x-7=0$; б) $5x=0$;
в) $-8x-10=0$; г) $4x+15=0$.

982. Число $k\neq0$. Решите уравнение:

а) $kx-10=0$; б) $kx+23=0$;
в) $kx+a=0$; г) $kx-b=0$.

9.2. Линейные уравнения с одним неизвестным

Следующие уравнения

$$7x+9=0,$$
$$3x-5+2x-1=2,$$
$$4x-3=3x-4,$$
$$0=2x-7-x-1,$$
$$6x-3+2x=3x-4-x+1$$

являются примерами линейных уравнений с одним неизвестным x.

Вообще, **линейным уравнением с одним неизвестным называют уравнение, левая и правая части которого есть многочлены первой степени относительно x или числа.** Члены многочленов, находящихся в левой и правой частях уравнения, называют **членами уравнения**.

Уравнение $kx+b=0$, где k и b — любые данные числа, есть линейное уравнение как при k, отличном от нуля, так и при k, равном нулю.

При k, отличном от нуля, оно, как отмечалось выше, называется также уравнением первой степени.

Таким образом, уравнение первой степени с одним неизвестным x есть частный случай линейного уравнения с одним неизвестным x.

Рассмотрим линейное уравнение

$$kx+b=0, \tag{1}$$

где k и b — данные числа.

Как показано в предыдущем пункте, уравнение (1) при $k\neq 0$ имеет единственный корень $x_0=-\frac{b}{k}$. В случае $k=0$ уравнение (1) имеет вид:

$$0\cdot x+b=0.$$

В этом случае, если $b\neq 0$, то уравнение (1) не имеет корней, а если $b=0$, то любое действительное число является корнем уравнения (1).

Итак, линейное уравнение (1):

1) при $k\neq 0$ имеет единственный корень $x_0=-\frac{b}{k}$,

2) при $k=0$ и $b\neq 0$ не имеет корней,

3) при $k=0$ и $b=0$ имеет бесконечно много корней — любое действительное число является его корнем.

Два уравнения называют **равносильными**, если любой корень первого уравнения является корнем второго, а любой корень второго является корнем первого.

Отметим три утверждения:

1) **Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное исходному.**

Например, умножив левую и правую части уравнения

$$x-1=2x-\frac{1}{7} \tag{1}$$

на 7, получим уравнение

$$7x-7=14x-1, \tag{2}$$

равносильное исходному. Потому что если число x_0 есть корень уравнения (1), то выполняется числовое равенство

$$x_0-1=2x_0-\frac{1}{7}. \tag{3}$$

Умножив его на 7, получим, что выполняется числовое равенство

$$7x_0-7=14x_0-1, \tag{4}$$

показывающее, что x_0 есть корень уравнения (2).

Если же x_0 есть корень уравнения (2), то справедливо числовое равенство (4). Разделив его на 7, получим, что справедливо числовое равенство (3), показывающее, что x_0 есть корень уравнения (1).

Вместо того чтобы говорить: умножим левую и правую части уравнения на число k, говорят: умножим уравнение на число k.

2) **Если перенести член уравнения с противоположным знаком из одной части уравнения в другую, то получим уравнение, равносильное исходному.**

Например, уравнения

$$3-2x=5x+3 \tag{5}$$

и

$$3=5x+3+2x \tag{6}$$

равносильны.

Чтобы получить уравнение (6), мы перенесли с противоположным знаком член $-2x$ уравнения (5) из левой его части в правую.

Говорят: перенесем член данного уравнения из одной его части в другую, подразумевая, что переносимый член надо взять с противоположным знаком.

3) **Если в левой или правой части линейного уравнения привести подобные члены, то получим уравнение, равносильное исходному.**

Например, уравнения

$$x+x+2-1=0$$

и

$$2x+1=0$$

равносильны.

Справедливость утверждений 2) и 3) показывается также, как справедливость утверждения 1).

983°. Какое уравнение называют линейным уравнением с одним неизвестным? Приведите примеры линейных уравнений.

984°. Является ли уравнение первой степени линейным уравнением?

985°. Что называют членами линейного уравнения?

986°. Какие уравнения называют равносильными? Приведите примеры равносильных уравнений.

987°. Какие утверждения о равносильности линейных уравнений вам известны?

988. Для каких значений k и b линейное уравнение

$$kx+b=0:$$

а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечно много решений?

989. Является ли данное уравнение линейным уравнением с одним неизвестным:

а) $2x-5=3x-4$;
б) $0{,}5x-7{,}3=-4x+6$;
в) $0\cdot x=0$;
г) $x^2-3x+4=2x^2+2x-3$;
д) $-10=5x-4$;
е) $x^2+3x-5=0$;
ж) $x+y-4=0$;
з) $7x+0\cdot y-2{,}1=0$?

990. Напишите два линейных уравнения с одним неизвестным.

991. Какие из чисел 5; 2,3; -8; 7 являются корнями уравнения $7x+56=-2x-16$?

992. Равносильны ли уравнения:

а) $2x+3=0$ и $2x=-3$;
б) $3x-7=4x-3$ и $0=(4x-3)-(3x-7)$;
в) $-3x-7=0$ и $3x+7=0$;
г) $-2x+3=0$ и $2x+3=0$;
д) $3x-7+2x-3=x$ и $4x-10=0$?

9.3. Решение линейных уравнений с одним неизвестным

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим уравнение

$$3x-5+2x-1=0. \qquad (1)$$

Приведя подобные члены в левой части этого уравнения, получим уравнение

$$5x-6=0, \qquad (2)$$

которое равносильно уравнению (1). Но уравнение (2) имеет единственный корень:

$$x_0 = \frac{6}{5}.$$

Следовательно, и уравнение (1) имеет тот же самый единственный корень:

$$x_0 = \frac{6}{5}.$$

Пример 2. Решим уравнение

$$2x+8=2x+6. \quad (3)$$

Перенеся члены правой части этого уравнения в левую, получим уравнение

$$2x+8-2x-6=0,$$

равносильное уравнению (3).

Приведя подобные члены, получим линейное уравнение

$$0x+2=0, \quad (4)$$

равносильное уравнению (3).

Уравнение (4) не имеет корней — нет числа x_0, которое удовлетворяло бы этому уравнению. Следовательно, и уравнение (3) не имеет корней.

Пример 3. Решим уравнение

$$2x+1=3x+1-x. \quad (5)$$

Перенеся члены его правой части в левую и приведя подобные члены, получим линейное уравнение

$$0x+0=0, \quad (6)$$

равносильное уравнению (5).

Уравнение (6) обращается в верное числовое равенство при любом числовом значении x. Следовательно, уравнение (5) имеет бесконечно много корней: любое действительное число есть корень уравнения (5).

З а м е ч а н и е. Мы рассмотрели примеры линейных уравнений с одним неизвестным x. Любое такое уравнение можно решить, перенеся все члены его правой части в левую и приведя затем подобные члены. В результате получится:

1) либо уравнение первой степени, которое имеет единственный корень;

2) либо линейное уравнение $0x+0=0$, показывающее, что любое действительное число есть корень исходного уравнения;

3) либо линейное уравнение $0 \cdot x+b=0$ $(b \neq 0)$, показывающее, что исходное уравнение не имеет корней.

993°. Может ли линейное уравнение с одним неизвестным не иметь корней? Приведите примеры.

994°. Может ли линейное уравнение с одним неизвестным иметь единственный корень? Приведите примеры.

995°. Может ли линейное уравнение с одним неизвестным иметь бесконечно много корней? Приведите примеры.

Решите уравнение **(996—1003)**:

996. а) $x+4=9$; б) $x+5=5$; в) $x-8=8$;
г) $x+2=-4$; д) $7x=10$; е) $5x=1$;
ж) $\frac{1}{3}x=2$; з) $3x=\frac{1}{7}$; и) $12x=0$;
к) $-3x=0$; л) $-x=0$; м) $-\frac{1}{2}x=0$.

997. а) $-\frac{3}{4}x=-\frac{6}{7}$; б) $-2\frac{1}{3}x=7$;
в) $0{,}2=5x$; г) $1{,}8x=-0{,}72$;
д) $1\frac{2}{3}x=2\frac{1}{3}$; е) $3{,}5x=2\frac{1}{3}$;
ж) $\frac{x}{5}=4$; з) $\frac{x}{3}=4$.

998. а) $3x-5=0$; б) $7x-4=0$;
в) $7-x=0$; г) $5-x=0$;
д) $18-10x=0$; е) $15-7x=0$;
ж) $x-2x+3=7$; з) $2x-4x-1=2$;
и) $3x-5=x$; к) $4x-2=x$;
л) $x-3=2x+1$; м) $3x+2=5x-7$.

999. а) $7x-3+x=4x-9+5x$;
б) $x+5-8x=7+2x-4$;
в) $x+0{,}2=0{,}4x+3{,}2$;
г) $0{,}5x-3=0{,}8-1{,}4x$;
д) $\frac{2}{3}-3x=\frac{1}{2}x-2+x$;
е) $5-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}x$;
ж) $\frac{2x}{7}-\frac{x}{4}=1$; з) $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=6$.

1000. а) $0\cdot x=3$; б) $0\cdot x=-2$;
в) $0\cdot x=0$; г) $3x-3x=0$;
д) $3x+(2x-1)=10$; е) $5x-(3x-1)=3$;
ж) $(3x-2)-(x-1)=10$;
з) $7-(2x-3)=x-(2-4x)$;
и) $12x+4=3(4x-2)$;
к) $5-3(x+5)=7-(2+3x)$;
л) $-x+3+x=x-(x-3)$;
м) $5x-4+2x=7(x-3)$;
н) $6(x-3)=12$;

о) $14=7(x+2)$;
п) $2(x-1)-4=6(x+2)$;
р) $3(x+1)-9=6(x-2)$.

1001. а) $3x-5=\frac{x+3}{4}$; б) $\frac{2-x}{3}=x-3$;
в) $\frac{x-3}{5}+\frac{x+2}{4}=\frac{1}{2}$;
г) $\frac{2x-3}{4}+\frac{x+2}{2}=6+\frac{2x-3}{2}$.

1002. а) $x+3=2x-4$; б) $2x-4=7x+2$;
в) $x+4=x+2$; г) $2x-6=3x$;
д) $5x=6x$; е) $2x+5-7x+2=3$;
ж) $3x-5=-2x+7+5x-12$;
з) $x-1+3x-5=(x-5)-(x-3)+(x+1)$.

1003. а) $7x+2-3x+10=0$;
б) $5x-8-(3x-8)=0$;
в) $3x-1-(2x+5-x)=0$;
г) $1,52-2,8x-(1,72-5,2x)=0$;
д) $5x+7-2x-(3-2x+x)=0$;
е) $7-0,2x-(21,28-1,6)=0$;
ж) $\frac{1}{2}x-3-\left(2-\frac{1}{3}x\right)=0$;
з) $1\frac{1}{5}-0,5x-0,4+\frac{2}{5}x=0$.

9.4. Решение задач с помощью линейных уравнений

Рассмотрим решение старинной задачи.

Задача 1. Летела стая гусей, а навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» А вожак ему и отвечает: «Нет, нас не сто гусей! Вот если бы нас было еще столько, да еще полстолько, да еще четверть столько, да ты, гусь, то было бы сто гусей. Вот и рассчитай-ка, сколько нас».

Решение. В задаче надо узнать, сколько гусей в стае. Обозначим это количество через x. Вожак сказал, что если бы гусей было:

еще столько же, т. е. еще x;

еще полстолько же, т. е. еще $\frac{1}{2}x$;

еще четверть столько же, т. е. еще $\frac{1}{4}x$;

да еще один гусь,

т. е. вожак сказал, что если бы гусей было:

$$x+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+1,$$

то их было бы сто.

Следовательно,

$$x+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+1=100.$$

Получилось линейное уравнение с одним неизвестным.

Решив это уравнение, получим единственный корень: $x_0=36$, а это означает, что в стае было 36 гусей.

Вот еще одна задача.

Задача 2. Отцу 50 лет, а сыну 20. Сколько лет тому назад отец был в 3 раза старше сына?

Решение. Обозначим искомое количество лет через x, тогда x лет назад отцу было $(50-x)$ лет, а сыну $(20-x)$ лет. Так как в то время отец был в 3 раза старше сына, то

$$50-x=3(20-x).$$

Получилось линейное уравнение с одним неизвестным. Решив его, найдем единственный корень: $x=5$.

Следовательно, пять лет назад отец был старше сына в 3 раза.

1004. Найдите два числа, сумма которых равна 86 и одно число на 12 больше другого.

1005. а) В трех школах 3230 учащихся. Во второй школе на 420 учащихся больше, чем в первой, а в третьей на 350 учащихся больше, чем в первой. Сколько учащихся в каждой школе?

б) На трех полках 276 книг. Сколько книг на каждой полке, если на второй полке на 16 книг больше, чем на первой, а на третьей в два раза больше книг, чем на первой?

в) Периметр треугольника равен 70 см. Определите стороны треугольника, если первая сторона в три раза больше второй и на 7 см больше третьей стороны.

г) В трех цехах завода работают 2400 человек. В первом цехе вдвое больше рабочих, чем во втором, а в третьем на 200 рабочих меньше, чем во втором. Сколько рабочих в каждом цехе?

1006. а) За два килограмма яблок и один килограмм слив заплатили 36 р. Сколько стоит один килограмм яблок и один килограмм слив, если килограмм яблок на 9 р. дороже килограмма слив?

б) От одного города до другого пассажирский поезд идет 4 ч, а машина 5 ч. Какова скорость поезда, если скорость машины меньше на 10 км/ч?

1007. Надо разменять 1 рубль на монеты по 10 и 5 копеек, чтобы всех монет было 26. Сколько должно быть монет по 10 копеек?

1008. На путь по течению реки пароход затратил 3 ч, а на обратный путь 5 ч. Скорость течения 5 км/ч. Какова скорость парохода в стоячей воде?

1009. а) На рыбалке отец с сыном поймали 15 рыбок. Сколько поймал сын, если известно, что отец поймал больше сына на 3 рыбки?

б) Масса ведра с водой 10 кг. Какова масса ведра, если известно, что оно на 9 кг легче воды в нем?

в) Сколько стоит пакет молока, если он дороже батона хлеба на 2,3 р., а за всю покупку заплатили 8,7 р.?

1010. а) Периметр прямоугольника равен 20 см. Найдите его длину и ширину, если длина на 8 см больше ширины.

б) Периметр прямоугольника равен 20 см. Длина в пять раз больше ширины. Найдите длину и ширину этого прямоугольника.

в) Найдите длину и ширину прямоугольника, если известно, что ширина на 1 см меньше длины, а периметр равен 20 см.

1011. а) Сумма двух последовательных четных чисел равна 38. Найдите эти числа.

б) Сумма трех последовательных четных чисел равна 18. Найдите эти числа.

в) Сумма двух последовательных нечетных чисел равна 24. Найдите эти числа.

г) Сумма трех последовательных нечетных чисел равна 21. Найдите эти числа.

1012. а) Груз массой 6,5 т перевозили на трех грузовиках. На первом и втором грузовиках было на 0,1 т больше, чем на третьем, а на первом — на 1,5 т больше, чем на втором. Сколько тонн груза было на каждом грузовике в отдельности?

б) На трех полках стоят книги. На первой на 4 книги меньше, чем на второй, а на третьей в два раза меньше, чем на первой и второй вместе. Сколько книг стоит на каждой полке, если их всего 96?

§ 10. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

10.1. Уравнения первой степени с двумя неизвестными

Уравнение

$$ax+by+c=0, \tag{1}$$

где a, b, c — данные числа и хотя бы одно из чисел a или b отлично от нуля, а x и y — неизвестные, называют уравнением первой степени с двумя неизвестными x и y.

Это название связано с тем, что левая часть уравнения (1) есть многочлен стандартного вида первой степени относительно x и y.

Числа a и b называют **коэффициентами при неизвестных,** число a — коэффициентом при x, а число b — коэффициентом при y.

Выражения

$$ax, by, c$$

называют **членами уравнения** (1). При этом число c называют **свободным членом.**

Пару чисел $(x_0; y_0)$ называют **решением уравнения** (1), если эти числа удовлетворяют уравнению (1), т. е. если при подстановке x_0 вместо x и y_0 вместо y уравнение превращается в верное числовое равенство

$$ax_0+by_0+c=0.$$

Примером уравнения первой степени с двумя неизвестными может служить уравнение

$$2x-3y+3=0. \qquad (2)$$

В нем $a=2$, $b=-3$, $c=3$, пара чисел (0; 1) есть решение уравнения (2). Но легко видеть, что уравнение (2) имеет бесконечно много решений. В самом деле, если вместо x подставить в уравнение (2) любое число x_0, то получим уравнение первой степени с одним неизвестным y. Решив его, найдем некоторое число y_0, которое вместе с заданным числом x_0 образует пару чисел $(x_0; y_0)$ — решение уравнения (2).

Полагая, например, $x_0=1$, получим уравнение с одним неизвестным y:

$$2\cdot 1-3y+3=0.$$

Его решение $y_0=\frac{5}{3}$. Следовательно, пара чисел $\left(1; \frac{5}{3}\right)$ есть решение уравнения (2).

Если любое число x_0 подставить в уравнение (2) и решить полученное уравнение первой степени относительно y:

$$-3y=-2x_0-3,$$

$$y=\frac{2x_0}{-3}+\frac{3}{-3},$$

то получим:

$$y=\frac{2}{3}x_0+1. \qquad (3)$$

Следовательно, каждому числу x_0 соответствует решение $(x_0; y_0)$ уравнения (2), где y_0 находится по данному x_0 по формуле (3). Например, если $x_0=0$, то из формулы (3) следует, что $y_0=1$, и пара чисел (0; 1) есть решение уравнения (2). Если же $x_0=3$, то из формулы (3) следует, что $y_0=3$, и пара чисел (3; 3) есть решение уравнения (2) и т. д.

Можно еще сказать, что любое решение уравнения (2) есть пара чисел $\left(x_0; \frac{2}{3}x_0+1\right)$, где x_0 — любое число.

Вообще, любое уравнение вида

$$ax+by+c=0 \qquad (4)$$

с коэффициентами a и b, не равными нулю, имеет бесконечно много решений, потому что его можно решить относительно y при любом заданном числовом значении x_0, и тогда полученное число y_0 вместе с заданным числом x_0 образуют пару чисел $(x_0; y_0)$ — решение уравнения (4). Так как чисел x_0 бесконечно много, то и решений уравнения (4) бесконечно много.

Выразить y через x из заданного уравнения с двумя неизвестными x и y — это значит решить это уравнение относительно y при любом заданном значении x.

Пример. Выразим из уравнения

$$2x-5y+2=0 \qquad (5)$$

y через x и запишем все решения этого уравнения.

Решение. Зададим произвольное число x. Подставим его в уравнение (5) и найдем из полученного уравнения y:

$$-5y=-2x-2,$$

$$y=\frac{-2x-2}{-5},$$

$$y=\frac{2}{5}x+\frac{2}{5}. \qquad (6)$$

Формула (6) выражает y через x из уравнения (5). Все решения уравнения (5) записываются в виде

$$\left(x; \frac{2}{5}x+\frac{2}{5}\right),$$

где x — любое число.

1013°. а) Какое уравнение называют уравнением первой степени с двумя неизвестными? Приведите примеры.

б) Что называют решением уравнения $ax+by+c=0$, где a и b не равны нулю одновременно?

1014°. Назовите члены уравнения $5x-2y+3=0$, коэффициенты при x и y, свободный член.

1015. Выразите y через x из уравнения:

а) $x+y=5$; б) $2x-y=3$;
в) $-3x+2y=7$; г) $3x-5y=8$;
д) $-3{,}5x+2y=0{,}2$; е) $x-0{,}3y=0{,}2$.

1016°. Является ли данное уравнение уравнением первой степени с двумя неизвестными (назовите коэффициенты при неизвестных и свободный член):

а) $3x-y+5=0$; б) $2x-5y-1=0$;
в) $2x+3y-1=0$; г) $0\cdot x-5y-4=0$;
д) $5x-4=0$; е) $0\cdot x+0\cdot y=0$;
ж) $2y-3x+4=0$; з) $x-0\cdot y-3=0$?

1017. Составьте уравнение первой степени с двумя неизвестными по данным a, b и c:

а) $a=5,\ b=4,\ c=-2$;
б) $a=0,\ b=-3,\ c=4$;
в) $a=0,\ b=2,\ c=-1$;
г) $a=-5,\ b=-1,\ c=0$.

1018. Напишите три уравнения первой степени с двумя неизвестными.

1019. Покажите, что пары чисел $(1;\ -1)$, $(5;\ -7)$, $(-3;\ 5)$ являются решениями уравнения $3x+2y-1=0$.

1020. Является ли решением уравнения $2x-y+4=0$ пара чисел:

а) $(1;\ -2)$; б) $(0;\ 4)$; в) $(-2;\ 1)$;
г) $(3;\ 4)$; д) $(5;\ 0)$; е) $(-2;\ 0)$?

1021. Является ли пара чисел $(1;\ 3)$ решением уравнения:

а) $2x-3y+5=0$; б) $-x+y-2=0$;
в) $x-y-6=0$; г) $7x-3{,}2y+4=0$;
д) $x+2y-7=0$; е) $0\cdot x-7y+21=0$?

1022. Найдите три решения уравнения:

а) $x+y-5=0$; б) $y-5=0$;
в) $2x-y+2=0$; г) $x+3=0$.

1023. В следующих уравнениях выразите y через x. *Например*:

$$\frac{2x}{5}-2y+\frac{1}{3}=0;$$
$$2x-10y+\frac{5}{3}=0;$$
$$6x-30y+5=0;$$
$$-30y=-6x+5;$$
$$y=\frac{-6}{-30}x+\frac{5}{30};$$
$$y=\frac{1}{5}x-\frac{1}{6}.$$

а) $4x-y+3=0$; б) $x-3y+6=0$;
в) $3x+y-2=0$; г) $5x-7y-3=0$;
д) $4x-2y+8=0$; е) $0{,}5x-2y+0{,}6=0$;
ж) $\frac{1}{3}x-0{,}2y+1=0$; з) $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}-2=0$.

1024. Выразите x через y в уравнении:

а) $x-3y+2=0$; б) $3x+2y-5=0$;
в) $-x+2y-3=0$; г) $-5x-y+7=0$;
д) $2x-y+4=0$; е) $2x-\frac{1}{2}y-4=0$;
ж) $2y-0{,}3y-1=0$; з) $\frac{5}{4}x-\frac{3}{2}y+4=0$.

1025. Запишите какое-либо решение уравнения:

а) $4x-y-2=0$; б) $3x+2y-7=0$;
в) $x-2y+4=0$; г) $5x-3y-2=0$.

1026. Составьте уравнение первой степени с двумя неизвестными из условия:

а) сумма двух чисел равна 10;
б) 2 л молока и 3 батона хлеба стоят 19 р.;
в) ручка дороже карандаша на 2,7 р.;
г) 1 кг кофе дороже 3 кг конфет на 57 р.

1027. а) При каком a пара чисел $(3; -2)$ является решением уравнения $3x-ay-4=0$?
б) При каком b пара чисел $(-1; -4)$ является решением уравнения $bx-7y-3=0$?

1028°. Сколько решений имеет уравнение $x-y+1=0$?

10.2. Системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

Задача. Известно, что разность лет брата и сестры равна 3, а сумма равна 15. Сколько лет брату и сколько лет сестре?

Решение. Надо найти две неизвестные величины: возраст брата и возраст сестры.

Пусть брату x лет, а сестре y лет. Так как разность лет брата и сестры равна 3, то

$$x-y=3, \qquad (1)$$

и так как сумма лет брата и сестры равна 15, то

$$x+y=15. \qquad (2)$$

Искомые числа x и y должны удовлетворять равенствам (1) и (2).

Следовательно, наша задача свелась к определению пары чисел x и y, которые удовлетворяют одновременно равенствам (1) и (2). В таких случаях говорят, что дана система двух уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} x-y=3, \\ x+y=15. \end{cases}$$

Для этой системы можно подобрать такую пару чисел: $x=9$, $y=6$. Следовательно, брату 9 лет, сестре 6 лет.

В следующем пункте мы покажем, как искать решения таких систем.

Пусть даны два уравнения первой степени с двумя неизвестными x и y:

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \text{ и } a_2x+b_2y+c_2=0. \qquad (3)$$

Говорят, что **дана система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными x и y, если требуется найти пары чисел $(x_0; y_0)$, являющиеся решениями одновременно и первого, и второго уравнений** (3).

Обычно уравнения системы записывают в столбик одно под другим и объединяют их слева фигурной скобкой:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{cases} \qquad (4)$$

Решением системы (4) называют такую пару чисел $(x_0; y_0)$, которая является решением каждого уравнения системы (4).

Решить систему — это значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Приведем *примеры* систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x-3y+1=0, \\ x+2y+4=0; \end{cases} \qquad (5)$$

$$\begin{cases} x-y+1=0, \\ 2x-2y+3=0; \end{cases} \qquad (6)$$

$$\begin{cases} 2x+y+2=0, \\ 6x+3y+6=0; \end{cases} \qquad (7)$$

$$\begin{cases} 3x+0y+1=0, \\ 2x+y-5=0; \end{cases} \qquad (8)$$

$$\begin{cases} 2x+0y-5=0, \\ 3x+0y+2=0; \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} 5x+0y-1=0, \\ 0x+3y+2=0. \end{cases} \qquad (10)$$

Если в системе уравнений (4) коэффициенты при неизвестных отличны от нуля и удовлетворяют условию $a_1:a_2=b_1:b_2$, то говорят, что уравнения этой системы имеют **пропорциональные коэффициенты** при неизвестных.

Например, уравнения системы (6) имеют пропорциональные коэффициенты при неизвестных. Уравнения системы (7) также имеют пропорциональные коэффициенты при неизвестных, более того, они пропорциональны свободным членам: $2:6=1:3=2:6$.

Если в системе уравнений (4) коэффициенты при неизвестных отличны от нуля и удовлетворяют условию $a_1:a_2\neq b_1:b_2$, то говорят, что уравнения (4) имеют **непропорциональные коэффициенты** при неизвестных.

Например, уравнения системы (5) имеют непропорциональные коэффициенты при неизвестных.

Обычно в уравнениях члены $0x$ и $0y$ опускают, тогда системы (8), (9) и (10) записывают в таком виде:

$$\begin{cases} 3x+1=0, \\ 2x+y-5=0; \end{cases} \qquad (8)$$

$$\begin{cases} 2x-5=0, \\ 3x+2=0; \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} 5x-1=0, \\ 3y+2=0. \end{cases} \qquad (10)$$

1029. Напишите систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

1030. Выясните, является ли пара чисел $(-3;\ 1)$ решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y-3=0, \\ 2x-3y-1=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y+4=0, \\ 3x+4y+5=0. \end{cases}$

1031°. Что называют решением системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными?

1032°. Что значит решить систему уравнений?

1033. Приведите примеры систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, имеющих коэффициенты при неизвестных:

а) пропорциональные; б) непропорциональные.

1034. Назовите коэффициенты и свободные члены уравнений системы:

а) $\begin{cases} 2x+3y+1=0, \\ 3x-2y-4=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x+y=0, \\ -2x-6=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -3x-2y+7=0, \\ 2x+5=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -4x-5=0, \\ 2y+4=0. \end{cases}$

1035. Составьте систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными по заданным коэффициентам при неизвестных a, b, a_1, b_1 и свободным членам c и c_1:

a	b	c	a_1	b_1	c_1
2	-3	1	1	5	4
-2	1	0	3	1	-7
0	-4	-2	1	0	0
-1	1	-4	0	-5	3

1036. Покажите, что пара чисел (1; 2) является решением системы:

а) $\begin{cases} x+y-3=0, \\ x-y+1=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2{,}5x-2{,}5=0, \\ \frac{1}{4}y-\frac{1}{2}=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+3y-8=0, \\ 4x-y-2=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0{,}35x+1{,}6y-3{,}55=0, \\ \frac{x}{6}-\frac{y}{7}+\frac{5}{42}=0. \end{cases}$

1037. Покажите, что пара чисел $(-2; 1)$ не является решением системы:

а) $\begin{cases} x+y-3=0, \\ 2x-y+5=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-4=0, \\ 2x+5y-1=0. \end{cases}$

1038. Какие из пар чисел (2; 1), (1; 2), (5; -3), (0; 2), (1; 0), (1; -4) являются решением системы:

а) $\begin{cases} 3x+y-5=0, \\ x-y+1=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+4=0, \\ 2x+3y-6=0? \end{cases}$

1039. Является ли пара чисел $(-1; 4)$ решением системы:

а) $\begin{cases} -x+y-3=0, \\ 2x-y+6=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+5y-2=0, \\ 2x+3y-10=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-2y-5=0, \\ 6x+2y+1=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -3y+12=0, \\ 6x+y+2=0? \end{cases}$

1040. При каких a и b пара чисел (1; 0) является решением системы:

а) $\begin{cases} 2x+y=a, \\ bx-y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-ay=3, \\ 2x+y=b? \end{cases}$

1041. Составьте систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными из условия:
а) сумма двух чисел равна 7, а их разность равна 2;
б) разность двух чисел равна 12, а их сумма равна 27.

10.3. Способ подстановки

В этом пункте рассматриваются системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, у которых все коэффициенты при неизвестных отличны от нуля и непропорциональны.

Как мы увидим в дальнейшем, любая такая система имеет единственное решение.

Пример 1. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x-y+4=0, \\ 3x+4y-27=0. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть пара чисел $(x_0;\ y_0)$ есть решение системы (1). Подставив эти числа в уравнения системы (1), получим верные числовые равенства:

$$\begin{cases} 2x_0-y_0+4=0, \\ 3x_0+4y_0-27=0. \end{cases} \tag{2}$$

Пользуясь первым числовым равенством, выразим y_0 через x_0:

$$y_0=2x_0+4. \tag{3}$$

Теперь во втором числовом равенстве системы (2) заменим число y_0 равным ему числом $2x_0+4$, т. е. подставим во второе числовое равенство $2x_0+4$ вместо y_0.

Получим верное числовое равенство

$$3x_0+4(2x_0+4)-27=0,$$

т. е. получим, что число x_0 удовлетворяет уравнению

$$3x+4(2x+4)-27=0.$$

Решив это уравнение, найдем, что $x_0=1$. Подставляя найденное значение в равенство (3), получим, что $y_0=6$.

Итак, если система (1) имеет решение $(x_0;\ y_0)$, то

$$x_0=1,\ y_0=6.$$

Подставляя эти числа в уравнения системы (1), убеждаемся, что они действительно удовлетворяют этим уравнениям.

Следовательно, система (1) имеет единственное решение (1; 6).

Заметим, что к этому же результату можно прийти, если выразить y_0 через x_0 из второго равенства системы (2) и полученное выражение для y_0 подставить в первое равенство этой системы.

Можно также в этих рассуждениях выразить x_0 через y_0 из какого-либо уравнения системы (2) и полученное выражение подставить в другое уравнение этой системы.

Аналогичные рассуждения можно провести и для любой системы уравнений вида:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \end{cases} \tag{4}$$

если у нее отличны от нуля и непропорциональны коэффициенты при неизвестных. (Системы уравнений с пропорциональными коэффициентами мы изучим позже.)

Из рассмотренного выше вытекает следующий способ решения системы (4), называемый **способом подстановки**.

Для того чтобы решить систему уравнений вида (4) с отличными от нуля и непропорциональными коэффициентами при неизвестных, надо:

1) одно из неизвестных (например, y) выразить через другое неизвестное из любого уравнения системы;

2) полученное выражение подставить вместо y в другое уравнение системы;

3) решить полученное уравнение с одним неизвестным x;

4) подставить найденное значение x_0 в формулу для y, найти y_0.

Пара чисел $(x_0; y_0)$ и будет единственным решением системы.

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x-5y-1=0, \\ 7x-y+6=0. \end{cases} \tag{5}$$

Из второго уравнения системы (5) выразим y через x:

$$y=7x+6 \tag{6}$$

и подставим в первое уравнение $7x+6$ вместо y:

$$4x-5(7x+6)-1=0. \tag{7}$$

Решив уравнение (7), найдем его единственный корень $x_0=-1$.

Подставляя x_0 в равенство (6), находим, что

$$y_0=7x_0+6=7\cdot(-1)+6=-1.$$

Значит, система (5) имеет единственное решение $(-1; -1)$.

1042°. Сколько решений имеет система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, если ее коэффициенты при неизвестных отличны от нуля и непропорциональны?

1043. Решите способом подстановки систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-2y=0, \\ 2x-3y-7=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+5y=0, \\ 3x+7y-16=0, \end{cases}$

в) $\begin{cases} y-3x=0, \\ x-2y+10=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 7x-y=0, \\ 3x-y+12=0. \end{cases}$

1044. Решите систему уравнений способом подстановки.
Например:

$$\begin{cases} x-2y-3=0, & (1) \\ 2x-y-9=0. & (2) \end{cases}$$

Решение.
1) Из уравнения (1) выразим x через y:
$$x=2y+3.$$
2) Подставим $2y+3$ вместо x в уравнение (2):
$$2(2y+3)-y-9=0,$$
$$y=1.$$
3) Найдем x: $x=2\cdot 1+3=5$.
Ответ: (5; 1).

а) $\begin{cases} x-y-1=0, \\ x+y-5=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y-2=0, \\ x+y-6=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y-2=0, \\ 3x-2y-9=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-2y-3=0, \\ 5x+y-4=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+2y-11=0, \\ 4x-5y+8=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x+4y-2=0, \\ 3x+8y-2=0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x+4y-90=0, \\ x-3y-10=0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 3x-2y-4=0, \\ x+5y-7=0; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 3x-4y-7=0, \\ x+2y+1=0; \end{cases}$ к) $\begin{cases} 7x-2y-6=0, \\ x+4y+12=0; \end{cases}$

л) $\begin{cases} x-3y-12=0, \\ 2x+4y=0; \end{cases}$ м) $\begin{cases} 2x+3y-3=0, \\ x-y+6=0. \end{cases}$

Решите систему уравнений **(1045—1046)**:

1045. а) $\begin{cases} 5x+y-7=0, \\ x-3y-11=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y-1=0, \\ 3x+2y+5=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+y-7=0, \\ x-2y+4=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+y+5=0, \\ x-3y-5=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+2y-4=0, \\ 3x+y+3=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 5x+y-15=0, \\ x-2y-14=0. \end{cases}$

1046. а) $\begin{cases} 2x-3y+7=0, \\ 3x+4y-1=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-3y-5=0, \\ 6x+8y+11=0. \end{cases}$

10.4. Способ уравнивания коэффициентов

Мы продолжаем рассматривать системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, у которых отличны от нуля и непропорциональны коэффициенты при неизвестных. Каждая такая система, как это уже отмечалось, имеет единственное решение.

Кроме решения таких систем способом подстановки, есть еще другой способ, называемый способом уравнивания коэффициентов или способом сложения.

Пример 1. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x+3y+1=0, \\ 3x+4y+2=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Предположим, что пара чисел $(x_0;\ y_0)$ есть решение системы (1). Подставив эти числа в уравнения системы (1), получим верные числовые равенства:

$$\begin{cases} 2x_0+3y_0+1=0, \\ 3x_0+4y_0+2=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Сделаем в этих равенствах коэффициенты при x_0 одинаковыми. Для этого умножим первое равенство на 3, а второе — на 2:

$$\begin{cases} 2x_0+3y_0+1=0, \\ 3x_0+4y_0+2=0. \end{cases} \left|\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\right.$$

Получим верные числовые равенства:

$$\begin{cases} 6x_0+9y_0+3=0, \\ 6x_0+8y_0+4=0. \end{cases}$$

Вычитая из первого равенства системы второе, получим верное числовое равенство $y_0-1=0$, откуда $y_0=1$.

Подставим это число в первое из равенств системы (2):

$$2x_0+3\cdot 1+1=0,$$

откуда $x_0=-2$.

Таким образом, если система (1) имеет решение $(x_0;\ y_0)$, то это может быть лишь пара чисел: $x_0=-2$, $y_0=1$.

Подставляя эти числа в уравнения системы (1), убеждаемся, что они действительно удовлетворяют этим уравнениям.

Следовательно, система (1) имеет единственное решение $(-2;\ 1)$. Мы подставили число 1 вместо y_0 в первое из равенств (2), но результат будет тот же, если подставить это число во второе из равенств (2).

В самом деле, тогда второе равенство запишется в виде $3x_0+4\cdot 1+2=0$. Отсюда опять находим, что $x_0=-2$. Мы снова получили уже найденное решение $(-2; 1)$. Вместо того чтобы уравнивать в равенствах (2) коэффициенты при x_0, можно уравнивать коэффициенты при y_0. Результат будет тот же самый.

Такие рассуждения можно провести для любой системы вида:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \end{cases} \tag{3}$$

если у нее отличны от нуля и не пропорциональны коэффициенты при неизвестных.

Из рассмотренного выше вытекает следующий способ решения системы (3), называемый **способом уравнивания коэффициентов или способом сложения.**

Для того чтобы решить систему уравнений вида (3) с отличными от нуля и непропорциональными коэффициентами при неизвестных, надо:

1) умножением на числа, отличные от нуля, уравнять коэффициенты при любом из неизвестных, например при x, в обоих уравнениях;

2) вычесть одно уравнение из другого;

3) решить полученное уравнение с одним неизвестным y;

4) подставить найденное значение y_0 в любое уравнение системы, найти из полученного уравнения с одним неизвестным его решение x_0.

Тогда найденная пара чисел $(x_0; y_0)$ и будет единственным решением системы.

Пример 2. Решим способом сложения систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+4y+5=0, \\ 2x+3y+1=0. \end{cases} \tag{4}$$

Умножая первое уравнение этой системы на 2, а второе — на 3 и вычитая затем из первого уравнения второе, получим линейное уравнение с одним неизвестным y:

$$-y+7=0,$$

откуда $y=7$. Подставляя 7 вместо y в первое уравнение системы (4), получаем

$$3x+28+5=0,$$

откуда $x=-11$.

Следовательно, система (4) имеет единственное решение $(-11; 7)$.

1047. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+2y-3=0, \\ x+y+1=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-3y+3=0, \\ x+y-1=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x+y-2=0, \\ 3x+y+3=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y-7=0, \\ 3x-y+1=0. \end{cases}$

Например:

$$\begin{cases} x+3y-3=0, \\ x+y-1=0. \end{cases}$$

Решение. 1)
$$\begin{array}{r} - \begin{array}{l} x+3y-3=0 \\ x+y-1=0 \end{array} \\ \hline x-x+3y-y-3-(-1)=0, \end{array}$$
$$2y-3+1=0,$$
$$y=1.$$

2)
$$x+y-1=0,$$
$$x+1-1=0,$$
$$x=0.$$

Ответ: (0; 1).

Замечание. Если коэффициенты при неизвестном являются противоположными числами, то равенства удобно не вычитать, а складывать.

Например:

$$\begin{cases} x+2y-3=0, \\ -x+3y-7=0. \end{cases}$$

Решение. 1)
$$\begin{array}{r} + \begin{array}{l} x+2y-3=0 \\ -x+3y-7=0 \end{array} \\ \hline x-x+2y+3y-3-7=0, \end{array}$$
$$5y-10=0,$$
$$y=2.$$

2)
$$x+2y-3=0,$$
$$x+2\cdot 2-3=0,$$
$$x=-1.$$

Ответ: (−1; 2).

1048. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+3y-1=0, \\ -x+4y+8=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+3=0, \\ -x+3y-2=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y+2=0, \\ 3x+y-4=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x+y-3=0, \\ -x-y+4=0. \end{cases}$

Например, решим систему способом уравнивания коэффициентов:

$$\left.\begin{cases} x-3y-5=0, \\ 2x+2y-2=0 \end{cases}\right| \begin{array}{l} 2 \\ \ \end{array}$$

Решение. 1) $$\begin{array}{r} 2x-6y-10=0 \\ -\ \underline{2x+2y-2=0} \\ 2x-2x-6y-2y-10-(-2)=0, \end{array}$$

$-8y-10+2=0,$

$-8y=8,$

$y=-1.$

2) $x-3y-5=0,$

$x-3\cdot(-1)-5=0,$

$x=2.$

Ответ: $(2;\ -1)$.

1049. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+2y-3=0, \\ 2x-3y+8=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y-8=0, \\ 3x+4y-7=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -6x+2y+6=0, \\ 5x-y-17=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x+3y-7=0, \\ 2x-y-5=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x+5y-15=0, \\ 3x+2y-6=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 4x-5y-3=0, \\ 3x-2y-11=0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x+4y-6=0, \\ 3x-2y-25=0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 5x+3y-7=0, \\ 3x-5y-45=0. \end{cases}$

1050. Решите систему уравнений способом подстановки и способом уравнивания коэффициентов:

а) $\begin{cases} 4x+5y-2=0, \\ x-3y+8=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x-2y-6=0, \\ 5x-y-17=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+y-3=0, \\ 3x+2y-5=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 7x-2y+15=0, \\ x-3y-6=0. \end{cases}$

1051. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 7x-y+1=0, \\ 2x+y-3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9x-3y+6=0, \\ 4x-y+2=0. \end{cases}$

10.5. Равносильность уравнений и систем уравнений

Уравнение, левой и правой частями которого являются числа или многочлены первой степени относительно x и y, называют **линейным уравнением с двумя неизвестными** x и y.

Примеры линейных уравнений:

$$2x-3y+1=0,$$
$$5x-4y=3x-1,$$
$$2x-3y=5,$$
$$3x-y+1=3x-y-1.$$

Члены многочленов, находящихся в левой и правой частях линейного уравнения, называют **членами** этого уравнения.

Два уравнения называют равносильными, если любое решение первого уравнения является решением второго, а любое решение второго является решением первого. В частности, равносильны два уравнения, каждое из которых не имеет решений.

1) Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное исходному.

Например, уравнения

$$2x-3y+1=0 \text{ и } 4x-6y+2=0$$

равносильны.

2) Если перенести с противоположным знаком член уравнения из одной части в другую, то получим уравнение, равносильное исходному.

Например, уравнения

$$5x-4y=3x-1 \text{ и } 5x-4y-3x+1=0$$

равносильны.

3) Если в левой или правой части линейного уравнения привести подобные члены, то получится уравнение, равносильное исходному.

Например, уравнения

$$2x-7+3x-4=y \text{ и } 5x-11=y$$

равносильны.

Доказательство этих утверждений проводится так же, как для линейного уравнения с одним неизвестным.

Если в любом линейном уравнении перенести все члены в левую часть и привести подобные члены, то окажется, что оно равносильно линейному уравнению

$$ax+by+c=0, \tag{1}$$

где a, b и c — некоторые числа.

При этом, если хотя бы одно из чисел a или b отлично от нуля, уравнение (1), как уже говорилось, есть уравнение первой степени.

Предположим, что в уравнении (1) $a=b=0$, $c\neq 0$, тогда оно имеет вид:

$$0\cdot x+0\cdot y+c=0$$

и никакая пара чисел $(x; y)$ не удовлетворяет ему, т. е. уравнение (1) не имеет решения.

Если $a=b=c=0$, то уравнению (1) удовлетворяют любые пары чисел $(x; y)$.

Две системы уравнений называют равносильными, если любое решение первой системы является решением второй системы и любое решение второй системы является решением первой

системы. В частности, две системы равносильны, если каждая из них не имеет решений.

Очевидно, что если одно из уравнений системы заменить другим, равносильным ему уравнением, то полученная система будет равносильна исходной.

Так, например, система

$$\begin{cases} 2x+y-1=0, \\ 4x+7y-5=0 \end{cases}$$

равносильна системе:

$$\begin{cases} y=-2x+1, \\ 4x+7y-5=0. \end{cases}$$

Ниже понятие равносильности применяется при решении систем первой степени с отличными от нуля и пропорциональными коэффициентами при неизвестных.

Пример 1. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y-1=0, \\ 2x+2y+3=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Коэффициенты при неизвестных в этой системе отличны от нуля и пропорциональны.

Разделим обе части второго уравнения системы (2) на 2, получим систему:

$$\begin{cases} x+y-1=0, \\ x+y+\frac{3}{2}=0, \end{cases} \qquad (3)$$

равносильную системе (2).

Перенеся свободные члены уравнений этой системы в их правые части, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x+y=-\frac{3}{2}, \end{cases} \qquad (4)$$

равносильную системе (3), следовательно, и системе (2).

Очевидно, что никакая пара чисел $(x;\ y)$ не может удовлетворять системе (4), потому что одно и то же число $x+y$ не может одновременно равняться и 1, и $-\frac{3}{2}$.

Таким образом, система (4) не имеет решений. Такую систему называют **противоречивой**.

Пример 2. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ 2x+2y+2=0. \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь также коэффициенты при неизвестных отличны от нуля и пропорциональны. Больше того, они пропорциональны свободным членам:

$$2:1=2:1=2:1.$$

Разделим обе части второго уравнения системы на 2, получим систему:

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ x+y+1=0, \end{cases} \qquad (6)$$

равносильную системе (5).

Очевидно, что множество решений системы (6) совпадает с множеством решений одного уравнения:

$$x+y+1=0.$$

Это уравнение имеет бесконечно много решений $(x;\ y)$, где x — любое число, а $y=-x-1$. Поэтому все решения системы (5) имеют вид: $(x;\ -x-1)$, где x — любое число.

Отметим, что любая система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \end{cases}$$

у которой коэффициенты при неизвестных отличны от нуля и пропорциональны, либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений. Такие системы можно решать подобно тому, как это было сделано в примерах 1 и 2. Но их можно также решать и способом подстановки.

Решим системы (2) и (5) способом подстановки.

Пример 3. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y-1=0, \\ 2x+2y+3=0. \end{cases}$$

Выразим y через x из первого уравнения системы:

$$y=-x+1$$

и подставим $(-x+1)$ вместо y во второе уравнение системы:

$$2x+2(-x+1)+3=0.$$

Получим уравнение $0x+5=0$, показывающее, что данная система не имеет решений.

Пример 4. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ 2x+2y+2=0. \end{cases}$$

Выразим y через x из первого уравнения системы:

$$y = -x - 1$$

и подставим $(-x-1)$ вместо y во второе уравнение системы:

$$2x + 2(-x-1) + 2 = 0.$$

Получим уравнение $0x + 0 = 0$, показывающее, что число y, равное $(-x-1)$, удовлетворяет как первому, так и второму уравнению системы при любых значениях x. Следовательно, все решения данной системы имеют вид: $(x; -x-1)$, где x — любое число.

1052°. Какое уравнение называют линейным уравнением с двумя неизвестными?

1053°. Что называют членами линейного уравнения?

1054°. Является ли уравнение первой степени с двумя неизвестными линейным?

1055. Приведите пример линейного уравнения с двумя неизвестными, не являющегося уравнением первой степени.

1056°. Какие два уравнения называют равносильными?

1057°. Сформулируйте утверждения о равносильности линейных уравнений.

1058° Какие две системы уравнений называют равносильными?

1059°. Сформулируйте утверждения о равносильности систем уравнений.

1060. При каком условии система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, у которой пропорциональны коэффициенты при неизвестных:

а) не имеет решений;
б) имеет бесконечно много решений?
Можно ли решать такие системы способом подстановки?

1061. Равносильны ли уравнения:

а) $2x-2y=x$ и $x-y=0$;
б) $3x-5y=0$ и $3x=5y$;
в) $3x-6+2y=0$ и $2-x-2y=0$;
г) $x+y-5=0$ и $x=5-y$?

1062. Докажите, что уравнения равносильны:

а) $2x-3y+y=4x-2$ и $x+y=1$;
б) $5(x+y)+1=x+3$ и $4x+5y-2=0$.

1063. Составьте уравнение, равносильное данному:

а) $4x-2+y=0$; б) $5x+4y-2=2x-3y+5$;

в) $3x+6y-9=0$; г) $x-y-1=0$.

1064°. Равносильны ли уравнения, если решения одного из них являются решениями другого?

1065. Равносильны ли системы уравнений:

а) $\begin{cases} x-y+3=0, \\ 2x+y-4=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=y-3, \\ 2(y-3)+y-4=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x-y+2=0, \\ -x+y-3=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x-y+2=0, \\ 2x-1=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x-2y-5=0, \\ x+y-2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4(2-y)-2y-5=0, \\ x=2-y; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y+1=0, \\ 3x-2y-2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} y=1-x, \\ 5x-4=0? \end{cases}$

1066. Составьте две системы уравнений, равносильные данной:

а) $\begin{cases} 4x-2y+5=0, \\ 3x+y-2=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+y-4=0, \\ -y=5-2x. \end{cases}$

1067. При каком a равносильны системы уравнений:

$\begin{cases} ax-y=5, \\ x+y=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-2=-y, \\ 4x-2y=0? \end{cases}$

1068. Равносильны ли системы уравнений:

$\begin{cases} x-2y=-1, \\ 3x+2y=5; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-y-1=0, \\ 5x+y-6=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} -3x+y+2=0, \\ 5x-2y-3=0? \end{cases}$

10.6. Решение систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Перенеся все члены правых частей этих уравнений в левые части и приведя подобные члены, получим равносильную данной систему вида:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \end{cases} \tag{1}$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — некоторые числа.

Мы уже знаем, как решать такую систему, когда все коэффициенты при неизвестных a_1, b_1, a_2, b_2 отличны от нуля. Мы знаем также, что если коэффициенты при неизвестных непропорциональны, то решение системы (1) существует и единственно; если же коэффициенты при неизвестных системы пропорциональны, то либо решений бесконечно много, либо нет ни одного решения.

Нам остается рассмотреть те случаи, когда некоторые коэффициенты при неизвестных равны нулю. Покажем это на характерных примерах.

Пример 1. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+1=0, \\ 2x+y-5=0. \end{cases} \tag{2}$$

Второе уравнение этой системы имеет отличные от нуля коэффициенты при неизвестных, а первое уравнение имеет коэффициент при x, отличный от нуля, и коэффициент при y, равный нулю.

Эту систему проще всего решить методом подстановки. Находим из первого уравнения

$$x=-\frac{1}{3}$$

и подставим его во второе. Получим:

$$2\left(-\frac{1}{3}\right)+y-5=0,$$

откуда

$$y=5\frac{2}{3}.$$

Таким образом, пара чисел $\left(-\frac{1}{3}; 5\frac{2}{3}\right)$ есть единственное решение системы (2).

Пример 2. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x-1=0, \\ 3y+2=0. \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) есть частный случай системы (1), где

$$a_1=5,\ b_1=0,\ c_1=-1,\ a_2=0,\ b_2=3,\ c_2=2.$$

Единственным решением этой системы является пара чисел $\left(\frac{1}{5}; -\frac{2}{3}\right)$.

Пример 3. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2y+3=0, \\ y+\frac{3}{2}=0. \end{cases} \tag{4}$$

Из каждого уравнения системы получаем:

$$y=-\frac{3}{2}.$$

Теперь вспомним, что систему (4) мы рассматриваем как частный случай системы (1), где $a_1=0$, $a_2=0$. Таким образом, система (4) может быть записана так:

$$\begin{cases} 0\cdot x+2y+3=0, \\ 0\cdot x+y+\frac{3}{2}=0. \end{cases}$$

Здесь x может быть любым числом, а $y=-\frac{3}{2}$.

Таким образом, решения системы (4) записываются в виде пар чисел $\left(x;\ -\frac{3}{2}\right)$, где x — любое число.

Пример 4. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x-2=0, \\ 2x-5=0. \end{cases} \qquad (5)$$

Эта система противоречива (не имеет решений), потому что x не может одновременно равняться и 2, и $\frac{5}{2}$.

Пример 5. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ 0\cdot x+0\cdot y+c_2=0. \end{cases} \qquad (6)$$

Если $c_2\neq 0$, то эта система противоречива, потому что никакая пара чисел $(x;\ y)$ не удовлетворяет второму уравнению системы (6).

Если $c_2=0$, то второе уравнение обращается в верное равенство при любых x и y. Остается только первое уравнение. Оно уже рассматривалось. Следовательно, все решения первого уравнения являются решениями системы, а как решать одно уравнение, мы знаем.

З а м е ч а н и е. Все рассмотренные выше примеры можно решить методом подстановки.

Покажем, как это сделать.

Система (2) была решена методом подстановки.

Решая первое уравнение системы (3) относительно x, получим: $x=\frac{1}{5}$. Теперь надо полученное значение для x подставить во второе уравнение этой системы. Можно считать, что второе уравнение имеет вид:

$$0x+3y+2=0,$$

и после подстановки $\frac{1}{5}$ вместо x получилось уравнение относительно y: $3y+2=0$, откуда $y=-\frac{3}{2}$.

Решая первое уравнение системы (4) относительно y, находим: $y=-\frac{3}{2}$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем: $0x+0=0$. Это показывает, что значение $y=-\frac{3}{2}$ удовлетворяет обоим уравнениям одновременно при любом x. Итак, всевозможные решения системы (4) определяются парами $\left(x;\ -\frac{3}{2}\right)$, где x — любое число.

Решая первое уравнение системы (5) относительно x и подставляя полученное значение 2 во второе уравнение, приходим к уравнению $-1=0$, показывающему, что система (5) противоречива.

Рассмотрим первое уравнение системы (6). Если $b_1\neq 0$, то y можно выразить через x. Получим выражение вида $y=kx+l$. Подставляя это выражение во второе уравнение системы, получим уравнение $0x+c_2=0$. Оно не имеет решений, если $c_2\neq 0$. Если $c_2=0$, то все решения системы (6) имеют вид $(x;\ y)$, где x — любое число, а $y=kx+l$ $\left(k=-\frac{a_1}{b_1};\ l=-\frac{c_1}{b_1}\right)$.

1069°. Может ли система двух линейных уравнений с двумя неизвестными не иметь решений; иметь одно решение; иметь бесконечно много решений? Приведите примеры.

1070°. Можно ли любую систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными решить способом подстановки?

1071. Является ли система уравнений противоречивой; имеющей бесконечно много решений; имеющей единственное решение:

а) $\begin{cases} x+y=4, \\ x+y=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=2, \\ x+y=2? \end{cases}$

Решите систему уравнений (**1072—1073**):

1072. а) $\begin{cases} x=3, \\ x+y-4=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y-7=0, \\ x=-2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x-y-8=0, \\ y-1=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+2y-2=0, \\ y=-5. \end{cases}$

1073. а) $\begin{cases} 4x+4y=2, \\ 2x+2y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ 2x-y=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=3, \\ 3x+3y=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-2y=4, \\ x-4=2y. \end{cases}$

1074. Составьте систему из двух линейных уравнений так, чтобы вместе с уравнением $3x-4y=2$ она была противоречива; имела бы бесконечно много решений.

Решите систему уравнений (**1075—1077**):

1075. а) $\begin{cases} x-y=5, \\ -4x+4y=20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+3y+4=0, \\ 5x+6y=7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x-2y=11, \\ 4x-5y=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x+6y=13, \\ 7x+18y+1=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 7x+6y=1{,}5, \\ 4x-9y-5=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x+4y=3{,}5, \\ -3x-4y=40. \end{cases}$

1076. а) $\begin{cases} \frac{x-3}{2}+\frac{y+4}{6}=2, \\ \frac{1}{3}(x+2)-y=\frac{1}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{5x}{2}+\frac{y}{5}+4=0, \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{6}=\frac{1}{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x+3}{2}-\frac{y-2}{3}=2, \\ \frac{x-1}{4}+\frac{y+1}{3}=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{x+y}{9}-\frac{x-y}{3}=2, \\ \frac{2x-y}{6}-\frac{3x+2y}{3}=-20; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{2x}{9}+\frac{y}{4}=0, \\ \frac{5x}{12}+\frac{y}{3}=1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{2y}{3}=2\frac{1}{2}, \\ \frac{3x}{2}+2y=0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8, \\ \frac{x+3}{3}+\frac{x-y}{4}=11; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \frac{2x-1}{5}+\frac{3y-2}{4}=2, \\ \frac{3x+1}{5}-\frac{3y+2}{4}=0. \end{cases}$

1077. а) $\begin{cases} x+5=5+3x, \\ x-3=9x+1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y+3=2y-4, \\ 2x+3=x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3y-4=2-3y, \\ y=1\frac{1}{3}-3y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=x+y, \\ x-y+2=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x+3y=2x+3y+2, \\ x-7y+1=0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3x+5y=5(x+3y)-2(x+5y), \\ y-3+x=2x+(x+y-3); \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x+4y+1=(x+y-2)+(2x+3y+3), \\ 2x=x+(2+x). \end{cases}$

10.7*. Системы уравнений первой степени с тремя неизвестными

Уравнение

$$ax+by+cz+d=0, \tag{1}$$

где a, b, c и d — данные числа, причем хотя бы одно из указанных чисел a, b или c не равно нулю, а x, y и z — неизвестные, называют **уравнением первой степени с тремя неизвестными** x, y и z.

Тройку чисел $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ называют **решением уравнения** (1), если эти числа удовлетворяют уравнению (1), т. е. если при подстановке числа x_0 вместо x, числа y_0 вместо y, числа z_0 вместо z уравнение (1) превращается в верное числовое равенство

$$ax_0+by_0+cz_0+d=0. \tag{2}$$

Аналогично определяется уравнение первой степени с четырьмя, пятью и т. д. неизвестными и его решение.

Пусть даны три уравнения первой степени с тремя неизвестными x, y и z. Говорят, что дана **система трех уравнений первой степени с тремя неизвестными** x, y и z, если требуется найти тройки чисел $(x;\ y;\ z)$, являющиеся решениями одновременно всех трех этих уравнений. Такие тройки называют **решениями** данной системы.

Аналогично определяется система четырех, пяти и т. д. уравнений первой степени с четырьмя, пятью и т. д. неизвестными и ее решение.

Решить систему уравнений — это значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Мы уже изучили системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными. Любую такую систему можно решить способом подстановки. Ниже мы приводим пример решения системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными и покажем, что эти системы также можно решать способом подстановки.

Пример. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x-3y+z-1=0, \\ 3x-4y-z+2=0, \\ x-y+z=0. \end{cases} \tag{3}$$

Покажем, как можно решить эту систему способом подстановки. Из третьего уравнения системы (3) выражаем x через y и z:

$$x=y-z \tag{4}$$

и подставляем $y-z$ вместо x в первое и второе уравнения системы (3). Получаем уравнения:

$$\begin{cases} 2(y-z)\quad 3y+z-1=0, \\ 3(y-z)\quad 4y-z+2=0, \end{cases}$$

которые после приведения подобных членов запишем в виде

$$\begin{cases} -y-z-1=0, \\ -y-4z+2=0. \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, методом подстановки можно свести решение системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными x, y и z к решению системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными y и z.

Решая систему (5), находим, что $y_0=-2$, $z_0=1$. Подставляя z_0 и y_0 в выражение (4), находим, что $x_0=-3$.

Итак, система (3) имеет единственное решение: $x_0=-3$, $y_0=-2$, $z_0=1$.

В общем случае при решении системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными x, y и z можно поступать так же, как в этом примере. Пользуясь одним из уравнений системы, надо выразить одно из неизвестных, например z, через остальные неизвестные, входящие в другие два уравнения. Затем надо решить полученную систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными x и y.

Если эта система имеет единственное решение, то находим ее решение — числа x_0 и y_0 и, подставляя их в выражение для z, находим z_0, тройка чисел $(x_0; y_0; z_0)$ и будет единственным решением системы. Если же эта система не имеет решений, то и исходная система также не имеет решений. Наконец, если эта система имеет бесконечно много решений, то и исходная система имеет бесконечно много решений.

Подобным образом решают системы уравнений первой степени с четырьмя, пятью и т. д. неизвестными.

1078°. Какое уравнение называют уравнением первой степени с тремя неизвестными?

1079°. Что называют решением уравнения первой степени с тремя неизвестными?

1080°. Что называют решением системы трех уравнений с тремя неизвестными?

1081°. Что значит решить систему уравнений?

1082°. В чем заключается способ подстановки для решения системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными?

1083. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x=1, \\ 3x+2y-3z=2, \\ 5x-y-5z=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3y=12, \\ x+y+z=7, \\ x-2y+2z=-3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x=2y, \\ 3x-2y-z=1, \\ 5x+4y-2z=8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=5, \\ 3x-2y+z=6, \\ x-5y+3z=-4; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2x-y+z=2, \\ 3x-2y+z=2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x-y+3z=7, \\ x+2y-z=1, \\ 3x-5y-4z=2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x+2y-5z=17, \\ x+y-z=6, \\ x-y-z=0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x+y+z=9, \\ x-y+z=3, \\ x+y-z=3. \end{cases}$

10.8. Решение задач при помощи систем уравнений первой степени

Задача 1 *(старинная)*. Сошлись два пастуха, Иван да Петр. Иван говорит Петру: «Отдай-ка мне одну овцу, тогда у меня будет овец вдвое больше, чем у тебя!» А Петр ему отвечает: «Нет! Лучше ты отдай мне одну овцу, тогда у нас будет овец поровну!» Сколько же было у каждого овец?

Решение. Пусть у Ивана было x овец, а у Петра — y овец. Если бы Петр отдал Ивану одну овцу, то у Петра осталось бы $(y-1)$ овец, а у Ивана стало бы $(x+1)$ овец. Но тогда у Ивана было бы вдвое больше овец, чем у Петра. Следовательно,

$$x+1=2(y-1). \qquad (1)$$

Если бы Иван отдал Петру одну овцу, то у Ивана осталось бы $(x-1)$ овец, а у Петра стало бы $(y+1)$ овец. Но тогда они имели бы овец поровну. Следовательно,

$$x-1=y+1. \qquad (2)$$

В задаче надо найти такие значения x и y, которые одновременно удовлетворяют и уравнению (1), и уравнению (2). Другими словами, надо решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x+1=2(y-1), \\ x-1=y+1. \end{cases} \qquad (3)$$

Решим эту систему способом подстановки.

Из первого уравнения выразим x через y:

$$x = 2y - 3. \tag{4}$$

Подставим $2y-3$ вместо x во второе уравнение системы (3), получим уравнение с одним неизвестным y:

$$(2y-3)-1 = y+1,$$

которое имеет единственное решение: $y_0 = 5$. Подставляя $y_0 = 5$ в уравнение (4), находим: $x_0 = 7$. Следовательно, система (3) имеет единственное решение: $x_0 = 7$, $y_0 = 5$.

Ответ: у Ивана было 7 овец, а у Петра — 5 овец.

Задача 2. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а через четверть часа за ним выехал автомобилист. На половине пути от A до B автомобилист догнал велосипедиста. Когда автомобилист прибыл в пункт B, велосипедисту осталось проехать еще треть пути. Какое время затратили на путь от A до B велосипедист и автомобилист, если известно, что скорости велосипедиста и автомобилиста постоянны?

Решение. Обозначим через x минут — время, за которое велосипедист проедет путь от A до B, а через y минут — время, за которое автомобилист проедет путь от A до B. На половину пути от A до B велосипедист затратил $\frac{1}{2}x$ минут, а автомобилист $\frac{1}{2}y$ минут. По условию на полпути от A до B они находились одновременно, хотя автомобилист выехал на 15 мин позже. Значит,

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 15. \tag{5}$$

К моменту прибытия автомобилиста в пункт B велосипедист находился в пути уже $(y+15)$ минут и проехал за это время $\frac{2}{3}$ расстояния от A до B, т. е. затратил на этот путь $\frac{2}{3}x$ минут, следовательно,

$$y + 15 = \frac{2}{3}x. \tag{6}$$

В задаче надо найти такие значения x и y, которые одновременно удовлетворяют и уравнению (5), и уравнению (6). Другими словами, надо решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y + 15 = \frac{1}{2}x, \\ y + 15 = \frac{2}{3}x. \end{cases} \tag{7}$$

Умножим правую и левую части первого уравнения системы (7) на 2, а второго — на 3, получим систему:

$$\begin{cases} y+30=x, \\ 3y+45=2x. \end{cases} \tag{8}$$

Решив эту систему, получим единственное решение: $x_0=45$, $y_0=15$.

Ответ: на путь от A до B велосипедист затратил 45 минут, а автомобилист 15 минут.

Задача 3*. Школьник затратил 140 р. на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка в 2 раза дешевле, книга в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 40 р. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил в 3 раза дешевле, авторучка в 4 раза дешевле, а книга в 2 раза дешевле, то за ту же покупку школьник заплатил бы 50 р. Сколько стоят портфель, авторучка и книга?

Решение. Пусть портфель стоит x рублей, авторучка — y рублей, а книга — z рублей.

Первое уравнение составим из условия, что покупка стоит 140 р.:

$$x+y+z=140.$$

Второе уравнение составим из условия: если бы портфель стоил $\frac{1}{5}x$ рублей, авторучка $\frac{1}{2}y$ рублей, книга $\frac{1}{2,5}z$ рублей, то покупка стоила бы 40 р.:

$$\frac{1}{5}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2,5}z=40.$$

Наконец, третье уравнение составим из условия: если бы портфель стоил $\frac{1}{3}x$ рублей, авторучка $\frac{1}{4}y$ рублей, книга $\frac{1}{2}z$ рублей, то покупка стоила бы 50 р.:

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z=50.$$

В задаче надо найти такие значения x, y и z, которые одновременно удовлетворяют всем трем этим уравнениям. Другими словами, надо решить систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x+y+z=140, \\ \frac{1}{5}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2,5}z=40, \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z=50. \end{cases} \tag{9}$$

Умножим обе части второго уравнения на 10, третьего — на 12, получим систему:

$$\begin{cases} x+y+z=140, \\ 2x+5y+4z=400, \\ 4x+3y+6z=600. \end{cases} \qquad (10)$$

Из первого уравнения системы (10) выразим z через x и y:

$$z=140-x-y \qquad (11)$$

и подставим выражение $140-x-y$ вместо z во второе и третье уравнения системы (10), получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x+5y+4(140-x-y)=400, \\ 4x+3y+6(140-x-y)=600. \end{cases} \qquad (12)$$

Решив систему (12), получим единственное ее решение: $x_0=90$, $y_0=20$.

Подставив $x_0=90$, $y_0=20$ в уравнение (11), получим $z_0=30$.

Следовательно, система (9) имеет единственное решение:

$$x_0=90,\ y_0=20,\ z_0=30.$$

Ответ: портфель стоил 90 р., авторучка — 20 р., а книга — 30 р.

1084. а) Сумма двух чисел равна 10, а их разность равна 4. Найдите числа.

б) Сумма двух чисел равна 21, а их разность равна 9. Найдите числа.

1085. а) Одно число больше другого на 6. Сумма этих чисел равна 40. Найдите числа.

б) Одно число меньше другого на 15. Сумма этих чисел равна 23. Найдите числа.

1086. а) Одно число в 2 раза больше другого. Если меньшее из этих чисел увеличить в 4 раза, а большее увеличить в 2 раза, то их сумма будет равна 44. Найдите числа.

б) Одно число в 3 раза больше другого. Если одно из чисел увеличить в 2 раза, то сумма станет равной 42. Найдите числа. Сколько решений имеет задача? Как следует изменить формулировку задачи, чтобы решение было единственным?

1087. а) Одно из чисел на 7 больше другого. Если меньшее число увеличить в 2 раза, а большее на 6, то их сумма станет равной 31. Найдите числа.

б) Одно из чисел на 10 меньше другого. Если большее число уменьшить в 3 раза, то их сумма станет равной 70. Найдите числа.

1088. а) Даны два числа. Если первое число умножить на 2, то полученное число будет на 1 больше второго; если второе число умножить на 2, то полученное число будет на 7 больше первого. Найдите числа.

б) Даны два числа. Если первое число умножить на 4, то полученное число будет на 6 больше второго; если второе уменьшить на 3, то полученное число будет меньше первого на 1,5. Найдите числа.

1089. а) Между поселками проложены две дороги: проселочная и шоссейная. Проселочная дорога на 5 км короче шоссейной, а их общая длина равна 61 км. Какова длина проселочной дороги?

б) От города до села ведут две дороги: грунтовая и асфальтированная. Грунтовая дорога на 18 км длиннее асфальтированной. Общая длина дорог равна 66 км. Какова длина грунтовой дороги?

1090. а) Пакет молока на 2,3 р. дороже батона хлеба. За два батона и три пакета молока заплатили 22,3 р. Сколько стоит батон хлеба?

б) Коробка акварельных красок стоит на 2,9 р. дороже, чем набор карандашей. Десять коробок красок и пять наборов карандашей стоят 83 р. Сколько стоит коробка красок?

1091. Норма выработки за смену на новом токарном станке на 30 деталей больше, чем на старом. При этом на пяти новых станках можно обработать за смену столько же деталей, сколько за то же время на восьми старых. Какова норма выработки на новом станке?

1092. Если из одного пункта одновременно и в одном направлении выедут мотоциклист и велосипедист, то через 1 ч мотоциклист обгонит велосипедиста на 33 км. Если же они одновременно выедут в противоположных направлениях, то через 1 ч расстояние между ними будет равно 57 км. Можно ли узнать скорости велосипедиста и мотоциклиста? Если можно, то узнайте.

1093. Школьники поехали на экскурсию. Обратно они возвращались другим путем, который был на 7 км короче первого. Какова длина каждого пути, если всего в оба конца школьники проехали 41 км?

1094. В прямоугольнике, периметр которого 52 см, разность длин двух сторон равна 4 см. Найдите стороны прямоугольника.

1095. Для класса, в котором учатся 30 учеников, купили билеты в театр стоимостью по 10 р. и 15 р. Сколько было куплено отдельно тех и других билетов, если их общая стоимость составила 350 р.?

1096. Школа приобрела 4 кресла и 2 стола, заплатив за них 3600 р. Если бы было куплено 2 кресла и 3 стола, то вся покупка стоила бы на 1400 р. меньше. Сколько стоят кресло и стол в отдельности?

1097. Рассчитываясь за покупку, мальчик получил сдачи 70 р. купюрами достоинством в 5 р. и 10 р. Всего он получил 10 купюр. Сколько купюр достоинством 5 р. он получил?

1098. Двузначное число в пять раз больше суммы своих цифр. Если данное число увеличить на 9, то получится число, в шесть раз большее суммы цифр данного числа. Найдите это число.

1099. Сумма двух натуральных чисел равна 31, а разность равна 5. Найдите эти числа.

1100. Два куска одинаковой ткани стоят вместе 910 р. Когда из первого куска продали столько, сколько было первоначально во втором, а из второго — половину того, что было первоначально в первом, то остаток первого куска оказался на 10 м больше остатка второго куска. Сколько метров ткани было в каждом куске, если 1 м ткани стоит 14 р.?

1101. Две бригады школьников во время производственной практики заработали 1170 р. Первая работала 15 дней, вторая — 14 дней. Сколько зарабатывала каждая бригада в день, если первая за 4 дня заработала на 110 р. больше, чем вторая за 3 дня? Какое допущение необходимо сделать для решения задачи?

1102. В школьный буфет завезли 300 пирожных и булочек, общая масса которых 20 кг. Масса всех пирожных такая же, как и всех булочек. Определите количество пирожных и булочек в отдельности, если масса пирожного 100 г, а булочки 50 г. Все ли данные, приведенные в задаче, необходимы для решения?

1103. 5% одного числа и 4% другого вместе составляют 46. 4% первого числа и 5% второго вместе составляют 44. Найдите эти числа.

1104. 20% одного числа и 50% другого вместе составляют 27, а 50% первого числа и 50% второго составляют 42,3. Найдите эти числа.

1105. В треугольнике большая сторона равна 16 см, а разность двух других сторон равна 0,4 дм. Чему равны стороны треугольника, если его периметр равен 0,38 м?

1106. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 0,9 м, большая сторона меньше суммы двух других сторон на 10 см, а утроенная меньшая сторона на 2 см больше суммы двух других сторон.

1107. Периметр треугольника 16 дм. Большая сторона превышает меньшую на 25 см, а удвоенная средняя (по длине) сторона меньше суммы двух других сторон на 1 см. Найдите стороны треугольника.

1108. Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если цифры этого числа переставить, то получится число, составляющее $\frac{4}{7}$ первоначального. Найдите это двузначное число.

1109. В трех сосудах 54 л воды. Если из первого перелить во второй 4 л, то в обоих сосудах будет воды поровну, а если из третьего сосуда перелить во второй 17 л, то во втором окажется в четыре раза больше воды, чем в третьем. Сколько воды в каждом сосуде?

1110*. В трех сосудах 36 л воды. Из первого сосуда перелили половину имевшейся в нем воды во второй сосуд, потом треть воды, оказавшейся во втором сосуде,— в третий и, наконец, четверть воды, оказавшейся в третьем сосуде, перелили в первый. После этих переливаний во всех сосудах оказалось воды поровну. Сколько воды было первоначально в каждом сосуде?

1111. *Задача Бхаскары (Индия, XII в.).* Некто сказал другу: «Дай мне 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя». Друг ответил: «Дай ты мне только 10, и я стану в 6 раз богаче тебя». Сколько было у каждого?

1112. Три утенка и четыре гусенка весят 2 кг 500 г, а четыре утенка и три гусенка весят 2 кг 400 г. Сколько весит 1 гусенок?

1113*. а) Алеша и Боря вместе весят 82 кг, Алеша и Вова весят 83 кг, Боря и Вова весят 85 кг. Сколько весят вместе Алеша, Боря и Вова?

б) *Старинная задача.* Четверо купцов имеют некоторую сумму денег. Известно, что, сложившись без первого, они соберут 90 р.; сложившись без второго — 85 р.; сложившись без третьего — 80 р.; сложившись без четвертого — 75 р. Сколько у кого денег?

в) *Старинная задача.* Отец имеет семь сыновей. Сумма лет первого и четвертого сына равна 9 годам, первого и шестого — 8 годам, второго и пятого — 8 годам, второго и третьего — 9 годам, третьего и шестого — 6 годам, четвертого и седьмого — 4 годам, а седьмого и пятого — также 4 годам. Сколько лет каждому?

1114*. Трем мальчикам раздали 145 орехов. Половина того числа орехов, которое получил первый мальчик, равна $\frac{2}{3}$ того числа орехов, которое получил второй мальчик, или $\frac{3}{4}$ того числа орехов, которое получил третий мальчик. Сколько орехов получил каждый из мальчиков?

1. Линейные диофантовы уравнения

Пусть дано уравнение

$$ax+by=c \ (a\neq 0,\ b\neq 0), \tag{1}$$

коэффициенты которого a, b и c — целые числа. Если поставлена задача найти только такие его решения $(x_0;\ y_0)$, где x_0, y_0 — целые числа, то это уравнение называют *линейным диофантовым уравнением*. Так его называют в честь греческого математика Диофанта (III в. до н. э.), который решал уравнения в целых числах.

Например, уравнение $2x+3y=1$ — это линейное диофантово уравнение, если поставлена задача найти только целые его решения. Одним из его решений является пара чисел $x=5$, $y=-3$, так как справедливо равенство $2\cdot 5+3\cdot(-3)=1$. Любое решение диофантова уравнения называют *частным решением* этого уравнения. Как будет показано далее, формулы $x=5-3n$, $y=-3+2n$, где n — любое целое число, задают все решения уравнения $2x+3y=1$. Говорят еще, что *общее решение* этого уравнения есть $x=5-3n$, $y=-3+2n$, где n — любое целое число. Общее решение этого уравнения записывают еще и так: $(5-3n;\ -3+2n)$, где n — любое целое число.

Далее на характерных примерах будет рассмотрено решение линейных диофантовых уравнений. Сначала рассмотрим диофантовы уравнения (1), в которых коэффициенты a и b положительны.

При $c=0$ уравнение (1) имеет вид

$$ax+by=0 \tag{2}$$

и называется *однородным диофантовым уравнением*.

Пример 1. Решим диофантово уравнение

$$2x+3y=0. \tag{3}$$

Перепишем уравнение в виде

$$2x=-3y. \tag{4}$$

При любых целых числах x и y правая часть уравнения (4) должна делиться на 2, и так как числа 2 и 3 взаимно просты, то y должен делиться на 2, т. е. y — целое число, делящееся на 2:

$$y=2n,$$

где n — целое число. Заметим, что n здесь может быть любым целым числом. Действительно, подставив $2n$ вместо y в уравнение (4), получим целое число $x=-3n$ при любом целом n. Следовательно, уравнение (3) имеет общее решение $(-3n;\ 2n)$, где n — любое целое число, и других решений не имеет.

Итак, все решения однородного диофантова уравнения (3) задаются формулами $x=-3n$, $y=2n$, где n — любое целое число.

Аналогично рассуждая в случае, если a и b — взаимно простые числа, получим, что решения уравнения (2) задаются формулами $x=-bn$, $y=an$, где n — любое целое число.

П р и м е р 2. Решим диофантово уравнение

$$8x+12y=0. \tag{5}$$

Здесь в отличие от уравнения (3) коэффициенты при неизвестных не являются взаимно простыми числами, так как НОД $(8;\ 12)=4$. Сократив уравнение (5) на 4, получим уравнение

$$2x+3y=0,$$

равносильное уравнению (5). Следовательно, все решения уравнения (5) задаются формулами $x=-3n$, $y=2n$, где n — любое целое число (см. пример 1).

П р и м е р 3. Решим диофантово уравнение

$$6x+9y=2. \tag{6}$$

При любых целых числах x и y левая часть уравнения (6) делится на 3, а правая часть уравнения на 3 не делится. Следовательно, уравнение (6) не имеет решений.

П р и м е р 4. Решим диофантово уравнение

$$6x+9y=3. \tag{7}$$

Левая и правая части уравнения (7) делятся на 3; сократим уравнение на 3, получим уравнение

$$2x+3y=1. \tag{8}$$

Сначала подберем частное решение уравнения (8). Например, пара $x=5$, $y=-3$ является частным решением уравнения (8), так как справедливо равенство $2\cdot5+3\cdot(-3)=1$.

В уравнении (8) заменим число 1 выражением $2\cdot5+3\cdot(-3)$ и преобразуем полученное уравнение:

$$2x+3y=2\cdot5+3\cdot(-3),$$
$$2(x-5)+3(y+3)=0. \tag{9}$$

Введем новые неизвестные:

$$x'=x-5,\ y'=y+3, \tag{10}$$

уравнение (9) перепишем в виде

$$2x'+3y'=0. \tag{11}$$

Все решения однородного уравнения (11) задаются формулами $x'=-3n$, $y'=2n$, где n — любое целое число. Теперь, используя равенства (10), получим, что все решения уравнения (7) задаются формулами $x=5+x'=5-3n$, $y=-3+y'=-3+2n$, где n — любое целое число.

Для любого линейного диофантова уравнения общее решение получается прибавлением к его частному решению общего решения соответствующего однородного уравнения.

Пример 5. Решим диофантово уравнение

$$2x+3y=7. \qquad (12)$$

Очевидное частное решение этого уравнения (2; 1), так как справедливо равенство $2\cdot 2+3\cdot 1=7$.

Общее решение однородного уравнения $2x+3y=0$ задается формулами $x=-3n$, $y=2n$, где n — любое целое число. Поэтому общее решение уравнения (12) есть $x=2-3n$, $y=1+2n$.

Заметим, что не всегда удается так легко найти частное решение линейного диофантова уравнения. Покажем на примерах, что это всегда можно сделать с помощью алгоритма Евклида.

Пример 6. Решим диофантово уравнение

$$31x+11y=1. \qquad (13)$$

Здесь коэффициенты a и b взаимно просты, а $c=1$. Найдем частное решение уравнения (13) с помощью алгоритма Евклида:

$$31=2\cdot 11+9,$$
$$11=1\cdot 9+2,$$
$$9=4\cdot 2+1.$$

Тогда $1=9-4\cdot 2=9-4\cdot(11-9)=5\cdot 9-4\cdot 11=5\cdot(31-2\cdot 11)-$ $-4\cdot 11=31\cdot 5-11\cdot 14$, т. е. $31\cdot 5+11\cdot(-14)=1$, следовательно, пара чисел $x_0=5$ и $y_0=-14$ есть частное решение уравнения (13).

Общее решение уравнения (13) задается формулами $x=5+11k$, $y=-14-31k$, где k — любое целое число.

Таким образом, все решения уравнения (13) задаются парами $(5+11k;\ -14-31k)$, где k — любое целое число.

Чтобы с помощью алгоритма Евклида найти частное решение линейного диофантова уравнения, надо в его правой части иметь число 1. Если этого нет, то нужно сделать замену неизвестных, как в следующем примере.

Пример 7. Решим диофантово уравнение

$$31x+11y=3. \qquad (14)$$

Найдем частное решение уравнения (14) среди чисел, делящихся на 3. Для этого сделаем замену неизвестных $x=3u$, $y=3v$. Сократив полученное уравнение на 3, получим равносильное уравнение

$$31u+11v=1. \qquad (15)$$

Как показано в предыдущем примере, частное решение уравнения (15) есть $u=5$, $v=-14$. Ему соответствует частное решение уравнения (14): $x=15$, $y=-42$. Остается прибавить к нему общее решение однородного уравнения $31x+11y=0$. Получим общее решение уравнения (14): $x=15+11k$, $y=-42-31k$, где k — любое целое число.

Запись общего решения можно упростить:

$$x=4+11(k+1)=4+11n,$$
$$y=-11-31(k+1)=-11-31n,$$

где n — любое целое число.

До сих пор мы рассматривали уравнения с положительными коэффициентами a и b. Если один из них или оба отрицательны, то надо выполнить замену неизвестных:

$$x'=-x \text{ или } y'=-y,$$

как в следующем примере.

Пример 8. Решим диофантово уравнение

$$31x-11y=3. \qquad (16)$$

Выполним замену неизвестных: $y'=-y$. Преобразуем уравнение (16):

$$31x+11y'=3. \qquad (17)$$

Общее решение уравнения (17) находится по формулам $x=4+11n$, $y'=-11-31n$, где n — любое целое число.

Остается выразить y через y', и тогда общее решение уравнения (16) задается формулами $x=4+11n$, $y=-y'=11+31n$, где n — любое целое число.

Отметим, что аналогичными рассуждениями решаются любые линейные диофантовы уравнения.

Диофантовы уравнения играют важную роль в математике. Л. Эйлер писал: «Диофантовых уравнений анализ немало служит изощрению разума начинающих и большое проворство в исчислении приносит». Линейные диофантовы уравнения возникают при решении некоторых задач. Рассмотрим сначала простую задачу.

Задача 1. У покупателя и продавца имеются монеты только по 2 р. и 5 р. Сможет ли покупатель заплатить за покупку стоимостью 1 р.?

Решение. Если покупатель даст x монет по 2 р. и y монет по 5 р., то он заплатит $(2x+5y)$ р., или 1 р. Следовательно,

$$2x+5y=1. \qquad (18)$$

Пара $(3; -1)$ является частным решением уравнения (18), так как $2\cdot3+5\cdot(-1)=1$. Это означает, что покупатель может дать 3 монеты по 2 р. и получить сдачу 1 монету по 5 р.

Общее решение диофантова уравнения (18) имеет вид $x=3-5n$, $y=-1+2n$, где n — любое целое число, т. е. способов оплаты товара стоимостью 1 р. в задаче 1 бесконечно много. Если, например, y окажется отрицательным, то это означает, что покупатель должен получить сдачу монетами по 5 р.

Задачи, приводящие к диофантовым уравнениям, часто содержат неизвестные величины, которые по смыслу задачи должны выражаться натуральными числами. Рассмотрим решение старинной задачи.

Задача 2. Двенадцать человек несут 12 хлебов; каждый мужчина несет по 2 хлеба, женщина — по половине хлеба, ребенок — по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?

Решение. Пусть было x мужчин, y женщин, тогда детей было $12-x-y$. Все вместе они несли $2x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}(12-x-y)$ хлебов. Составим уравнение:

$$2x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}(12-x-y)=12.$$

Умножим правую и левую части этого уравнения на 4, после преобразований получим равносильное ему уравнение

$$7x+y=36,$$

имеющее частное решение $x=5$, $y=1$ и общее решение $x=5-n$, $y=1+7n$, где n — любое целое число. Чтобы x, y и $(12-x-y)$ были натуральными числами, можно взять только одно значение n, равное 0. При этом $x=5$, $y=1$, $12-x-y=6$, т. е. было 5 мужчин, 1 женщина и 6 детей.

Ответ: 5 мужчин, 1 женщина и 6 детей.

1115. Решите уравнение в целых числах:
а) $3x+4y=0$; б) $6x+8y=0$;
в) $4x+6y=3$; г) $5x+3y=1$;
д) $5x+3y=4$.

1116. Решите линейное диофантово уравнение:
а) $3x+5y=10$; б) $2x-5y=15$;
в) $2x+3y=5$; г) $7x-5y=2$;
д) $2x+7y=14$; е) $3x+5y=60$.

1117°. Объясните, почему не имеет в целых числах решений уравнение:
а) $2x+6y=11$; б) $3x-9y=10$;
в) $7x-21y=12$.

1118. У покупателя и продавца есть купюры по 5 р. и 50 р. Сможет ли покупатель заплатить за покупку стоимостью:
а) 112 р.; б) 30 р.?

1119. *Задачи Л. Пизанского (Фибоначчи).* а) Некто купил 30 птиц за 30 монет, из числа этих птиц за каждых трех воробьев заплачена 1 монета, за каждые две горлицы — также 1 монета и, наконец, за каждого голубя — по 2 монеты. Сколько было птиц каждой породы?
б) 30 птиц стоят 30 монет, куропатки стоят по 3 моне-

ты, голуби — по 2 монеты и пара воробьев — по монете. Спрашивается, сколько птиц каждого вида.

1120. *Задача Джан Цюцзяня (Китай, V в.).* 1 петух стоит 5 цяней (денежных единиц), 1 курица стоит 3 цяня, 3 цыпленка стоят 1 цянь. Всего на 100 цяней купили 100 птиц. Спрашивается, сколько было в отдельности петухов, кур, цыплят.

1121. *Задача Адама Ризе (XVI в.).* 26 персон издержали вместе 88 марок, причем мужчины издержали по 6 марок, женщины — по 4, девушки — по 2. Сколько было мужчин, женщин и девушек?

1122. *Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* Купил некто на 80 алтын гусей, утят и чирков. Гуся покупал по 2 алтына, утку — по 1 алтыну, чирка же — по 3 деньги, а всех куплено 80 птиц. Спрашивается, сколько каких птиц он купил.
(1 алтын = 3 к., 1 деньга = 0,5 к.)

1123. *Старинная задача.* Хозяин послал работника на базар купить 20 птиц: гусей, уток и малых чирков. Он дал работнику 16 алтын. Гусей велел покупать по 3 копейки за штуку, уток — по копейке, а малых чирков — по два на копейку. Сколько гусей, уток и чирков купил работник?

1124*. *Задача Л. Эйлера.* Некий чиновник купил лошадей и быков за 1770 талеров. За каждую лошадь он уплатил по 31 талеру, а за каждого быка — по 21 талеру. Сколько лошадей и быков купил чиновник?

2. Метод Гаусса

Для решения систем линейных уравнений мы применяли метод подстановки, разобранный выше. Для решения систем уравнений применяют еще метод Гаусса, названный так в честь великого немецкого математика Карла Гаусса (1777—1855). Этот метод широко применяется в практике вычислений при решении систем линейных уравнений с большим количеством неизвестных. Ниже на примерах рассмотрен этот метод.

К. Гаусс

П р и м е р 1. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 7y = -10, \\ \quad\;\; 3y = 12. \end{cases} \qquad (1)$$

Из второго уравнения найдем $y = 4$; подставив 4 вместо y в первое уравнение, найдем $x = 9$. Система (1) имеет единственное решение (9; 4).

Пример 2. Решим систему уравнений,

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5, \\ \qquad 2y+z=7, \\ \qquad\quad 5z=15. \end{cases} \tag{2}$$

Из третьего уравнения найдем $z=3$; подставив 3 вместо z во второе уравнение, найдем $y=2$. Наконец, подставив 3 вместо z и 2 вместо y в первое уравнение, найдем $x=1$. Система (2) имеет единственное решение (1; 2; 3).

Пример 3. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x-y+z+u=11, \\ \quad 2y-z+2u=-9, \\ \qquad z-u=5, \\ \qquad\quad 2u=-4. \end{cases} \tag{3}$$

Из четвертого уравнения найдем $u=-2$, из третьего $z=3$, из второго $y=-1$, из первого $x=3$. Система (3) имеет решение единственное (3; -1; 3; -2).

Системы уравнений вида (1), (2) и (3) называют системами «треугольного» вида; такие системы легко решать, начиная с самого простого уравнения, затем переходя к следующему по простоте уравнению и т. д.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений заключается в том, что эту систему сначала приводят к «треугольному» виду, а затем решают так, как это было показано выше. Покажем, как решать систему уравнений методом Гаусса.

Пример 4. Решим систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l|c|c} -5x+3y-z=-7, & 4 & -2 \\ 2x-5y+4z=-8, & 1 & \\ 3x+4y-2z=12. & & 1 \end{array}\right.$$

С помощью первого уравнения исключим z из второго и третьего уравнений. Для этого умножим правую и левую части первого уравнения на 4 и сложим почленно полученное уравнение со вторым уравнением. Потом умножим правую и левую части первого уравнения на -2 и сложим почленно полученное уравнение с третьим уравнением. Получим систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l|c} -5x+3y-z=-7, & \\ -18x+7y=-36, & 2 \\ 13x-2y=26. & 7 \end{array}\right.$$

Теперь с помощью второго уравнения исключим y из третьего уравнения. Для этого умножим правую и левую части второго уравнения на 2, а правую и левую части третьего уравнения — на 7 и сложим почленно полученные уравнения. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} -5x+3y-z=-7, \\ -18x+7y \quad =-36, \\ 55x \qquad\quad =110 \end{cases}$$

«треугольного» вида, решение которой (2; 0; −3) нетрудно найти.

1125. Решите систему уравнений «треугольного» вида:

а) $\begin{cases} y=3, \\ x-4y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x \quad =7, \\ 2x-3y=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x \quad =6, \\ -3x+5y=16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} z=2, \\ 4y-3z=2, \\ 3x+4y-6z=2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x \qquad =-6, \\ 3x-y \quad =0, \\ -x+y-z=-6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} -x+y+z=5, \\ 4x-3y \quad =5, \\ 3x \qquad =15. \end{cases}$

1126. Решите методом Гаусса систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x-5y=1, \\ x-10y=-8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x+3y=0, \\ 4x-5y=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ 5x+6y=11; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+3y-4z=7, \\ 3x-4y+5z=2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x+y-z=-1, \\ 2x-3y+2z=2, \\ -x+5y-3z=-3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} -3x+5y-2z=0, \\ 3x-2y+5z=6, \\ 4x+2y-5z=1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x-y-z=1, \\ -x+y+z=-1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x+y+z=6, \\ 2x-y+2z=6, \\ -x+3y-z=2; \end{cases}$

и) $\begin{cases} -2x+7y-4z=1, \\ 4x-8y+5z=1, \\ 3x+2y-4z=1. \end{cases}$

3. Исторические сведения

В старые времена был широко распространен метод решения задач, называемый правилом ложных положений. Это правило перешло в Европу от арабов, у которых оно называлось правилом весов. К арабам, как полагают, правило пришло от индусов.

Во времена Л. Ф. Магницкого в России, по-видимому, не умели применять уравнения первой степени к решению задач, поэтому в своей «Арифметике» Л. Ф. Магницкий сохранил старинный способ решения задач. Рассмотрим задачу и ее решение из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.

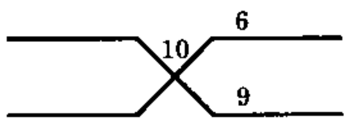
Задача. Найти число, которое, будучи увеличено на $\frac{2}{3}$ самого себя и на 1, дает 10.

Решение. Сначала решим задачу с помощью уравнения. Пусть x — неизвестное число, $x+\frac{2}{3}x+1$ — число, полученное увеличением данного числа на его $\frac{2}{3}$ и еще на 1, что по условию задачи дает 10. Составим уравнение и решим его:

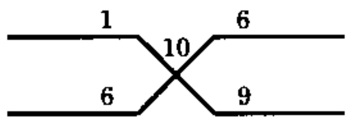
$$x+\frac{2}{3}x+1=10,$$
$$\frac{5}{3}x=9,$$
$$x=9:\frac{5}{3},$$
$$x=5\frac{2}{5}.$$

Теперь рассмотрим решение задачи из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.

Положим, что искомое число 9, тогда $\frac{2}{3}$ его будет 6, и мы получим $9+6+1=16$, что больше 10 на 6; все это записываем так:



Положим, что искомое число 6, тогда $\frac{2}{3}$ его будет 4, и мы получим $6+4+1=11$, что больше 10 на 1. Впишем полученные числа:



Теперь, чтобы найти число, умножаем 9 на 1 и 6 на 6; из большего 36 вычитаем меньшее 9, получим 27 и делением на разность ошибок $6-1=5$ находим $\frac{27}{5}=5\frac{2}{5}$.

Освоить и применять такой способ решения задачи учащиеся, видимо, могли, но вряд ли они понимали суть выполняемых действий.

Докажем, что приведенное выше старинное решение действительно дает правильный ответ, причем независимо от того, какие числа взять вместо 9 и 6.

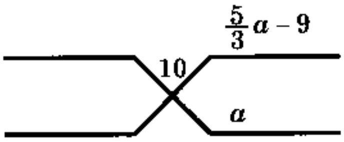
Доказательство*. Ответом задачи служит число $x=\frac{27}{5}$ — корень уравнения

$$x+\frac{2}{3}x+1=10. \tag{1}$$

Решая задачу способом ложных положений, в левую часть уравнения (1) подставим сначала число a (в решении Магницкого $a=9$) и из результата вычтем 10.

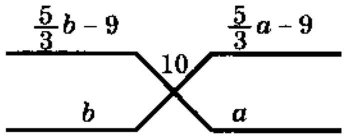
Получим:

$$\frac{5}{3}a+1-10=\frac{5}{3}a-9.$$



В левую часть уравнения (1) подставим число b (в решении Магницкого $b=6$) и из результата вычтем 10. Получим:

$$\frac{5}{3}b+1-10=\frac{5}{3}b-9.$$



Разность произведений

$$b\left(\frac{5}{3}a-9\right)-a\left(\frac{5}{3}b-9\right)=9(a-b)$$

разделим на разность ошибок

$$\left(\frac{5}{3}a-9\right)-\left(\frac{5}{3}b-9\right)=\frac{5}{3}(a-b),$$

получим: $\dfrac{9(a-b)}{\frac{5}{3}(a-b)}=\dfrac{27}{5}$.

Как видим, старинное решение действительно дает правильный ответ, причем независимо от того, какие различные числа a и b взять вместо 9 и 6.

Сравнение двух способов решения одной задачи показывает, что использование уравнения упростило решение задачи, и, что самое главное, сделало его понятным.

4. Задания для повторения

Выполните действия **(1127—1128)**:

1127. а) $\dfrac{3:(0{,}2-0{,}1)}{2{,}5\cdot(0{,}8+1{,}2)}$; б) $\left(0{,}4:2\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(4{,}2-1\dfrac{3}{40}\right)$;

в) $\dfrac{\left(4{,}5\cdot1\dfrac{2}{3}+3{,}75\right)\cdot\dfrac{7}{135}}{\dfrac{5}{9}}$; г) $\dfrac{(34{,}06-33{,}81)\cdot4}{6{,}84:(28{,}57-25{,}15)}$;

д) $\dfrac{0{,}134+0{,}05}{18\dfrac{1}{6}-1\dfrac{11}{14}-\dfrac{2}{15}\cdot2\dfrac{6}{7}}$; е) $\dfrac{\left(0{,}3-\dfrac{3}{20}\right)\cdot1\dfrac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\dfrac{3}{25}\right)\cdot\dfrac{1}{80}}$;

ж) $\dfrac{(0{,}6+0{,}425-0{,}005)\cdot0{,}01}{30\dfrac{5}{9}+3\dfrac{4}{9}}$; з) $\dfrac{(2{,}3+5:6{,}25)\cdot7}{8\cdot0{,}0125+6{,}9}$.

1128. а) $\dfrac{12{,}8\cdot3\dfrac{3}{4}-4\dfrac{4}{11}\cdot4{,}125}{2\dfrac{4}{7}:\dfrac{3}{35}}$; б) $\dfrac{28{,}8:13\dfrac{5}{7}+6{,}6\cdot1\dfrac{1}{2}}{1\dfrac{1}{80}:1{,}35}$;

в) $\dfrac{6{,}72:\dfrac{3}{5}+1\dfrac{1}{8}\cdot0{,}8}{4{,}84:4}-6\dfrac{3}{8}$; г) $\dfrac{\left(6\dfrac{7}{12}-3\dfrac{17}{36}\right)\cdot2{,}5-4\dfrac{1}{3}:0{,}65}{4:\dfrac{1}{4}-0{,}5}$.

1129. Расположите в порядке возрастания значения выражения:

а) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$, $\dfrac{2}{3}$, $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3$, $\dfrac{5}{9}$;

б) $\dfrac{1}{2}$, $\left(-\dfrac{1}{4}\right)^3$, $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$, $\left(-1\dfrac{1}{3}\right)^3$.

Вычислите **(1130—1132)**:

1130. а) $\dfrac{0{,}5+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+0{,}125}{\dfrac{1}{3}+0{,}4+\dfrac{14}{15}}+\dfrac{(3{,}75-0{,}625)\cdot\dfrac{48}{125}}{12{,}8\cdot0{,}25}$;

б) $\dfrac{2\dfrac{3}{4}:1{,}1+3\dfrac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot3\dfrac{1}{3}}:\dfrac{5}{7}-\dfrac{\left(2\dfrac{1}{6}+4{,}5\right)\cdot0{,}375}{2{,}75-1\dfrac{1}{2}}$;

в) $\dfrac{\left(\dfrac{97^3 - 53^3}{44} + 97\cdot 53\right):(152{,}5^2 - 27{,}5^2)}{(36{,}5^2 - 17{,}5^2):\left(\dfrac{57^3 + 33^2}{90} - 57\cdot 33\right)}$;

г) $\dfrac{(94{,}5^2 - 30{,}5^2):\left(\dfrac{69^3 + 29^3}{98} - 69\cdot 29\right)}{(133{,}5^2 - 58{,}5^2):\left(\dfrac{79^3 - 41^3}{38} + 79\cdot 41\right)}$.

1131. а) $(0{,}2:5 + 5:0{,}2 - 2{,}794:1{,}1)\cdot 0{,}6 - 13{,}5$;
б) $56{,}32:51{,}2 + 48{,}8:61 - (2{,}4 - 2{,}4\cdot 0{,}15)$;
в) $\left(3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9 + 19{,}5:4\frac{1}{2}\right):\left(\frac{62}{75} - 0{,}16\right)$;
г) $\left(8{,}5 - 7\frac{3}{8}\right)\cdot 5\frac{2}{3} - 1{,}8\cdot\left(3\frac{1}{3} - 2\frac{7}{9}\right)$.

1132. а) $2{,}56:0{,}128 - 5{,}6$;
б) $(-4{,}12):(-20{,}6) - 5{,}6$;
в) $6{,}4:(-0{,}32) - 1{,}8\cdot 10$;
г) $10{,}2:0{,}24 - 1{,}5:0{,}25$;
д) $482{,}28:12 - 20{,}19$;
е) $33{,}425:(-3{,}5) + (-2{,}45)\cdot(-4)$;
ж) $(2{,}51\cdot 5 + 0{,}14 - 0{,}25)\cdot(-5)$;
з) $5{,}6 - (0{,}006 + 0{,}994)\cdot 1{,}2$.

1133. Точка C является серединой отрезка AB (рис. 18). Найдите координату:
а) точки C на рисунке а);
б) точки B на рисунке б);
в) точки A на рисунке в).

1134. Вычислите значение выражения:
а) $(5a+3)(5a-3)$ при $a=2$;
б) $(a-2)(a+3)-(5-a)(4-a)$ при $a=-2$;
в) $5a^2 - 10ab + 5b^2$ при $a=124$, $b=24$;
г) $ax^2 + 2axy + ay^2$ при $a=4$, $x=71$, $y=29$;
д) $\dfrac{7}{5a+5} - \dfrac{3}{10a+10}$ при $a=10$;
е) $\dfrac{2a-1}{2a} - \dfrac{2a}{2a-1} - \dfrac{1}{2a-4a^2}$ при $a=-\dfrac{1}{2}$.

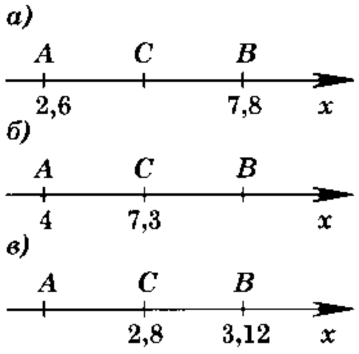


Рис. 18

1135. Упростите выражение:
а) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a}$;
б) $\dfrac{1}{b} + \dfrac{3}{2b}$;
в) $\dfrac{3}{x-a} - \dfrac{x}{x-a}$;
г) $\dfrac{b}{a-b} + \dfrac{5}{b-a}$;

д) $\frac{3k}{b}+\frac{2b}{k}$; е) $\frac{3b}{(b-1)^2}+\frac{2}{1-b}$;

ж) $\frac{2x-1}{x^2-4}+\frac{4}{x-2}$; з) $\frac{7}{m}-\frac{4}{m-2n}-\frac{m-n}{4n^2-m^2}$;

и) $\frac{3x}{x^2-2x+1}-\frac{6}{x^2-1}-\frac{3x-2}{x^2+2x+1}$;

к) $\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{a}{x}\right)\cdot\frac{x^3}{a^3-x^3}$;

л) $\frac{4x-3}{3-2x}-\frac{4+5x}{3+2x}-\frac{3+x-10x^2}{4x^2-9}$.

1136. Докажите алгебраическое равенство:

а) $\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)=x+y$;

б) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right):\left(1+\frac{y}{x}\right)=\frac{x}{x-y}$;

в) $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)=-m$;

г) $\left(a-\frac{4ab}{a+b}+b\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)=a-b$.

1137. Выделите полный квадрат из двучлена:

а) x^2+4x+1; б) $4b^2+8b+6$;

в) a^2-2a+3; г) m^2-3m+7.

1138. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}+\frac{1}{\frac{a^2}{b^2}-1}\right)$;

б) $\left(\frac{x^2y-xy^2}{x-y}+xy\right)\cdot\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)$;

в) $\left(\frac{n}{m-n}+\frac{m}{m+n}\right)\cdot\left(\frac{m^2}{n^2}+\frac{n^2}{m^2}-2\right)$;

г) $\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}+4x\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

Решите уравнение (**1139—1141**):

1139. а) $x-11=7$; б) $6+x=2$;

в) $12+x=-6$; г) $x+13=5$;

д) $7x=-14$; е) $-17x=51$;

ж) $6x=7$; з) $2x=-13$;

и) $-x=2$.

1140. а) $x+2=1$; б) $x-3=2$;

в) $2x=3$; г) $\frac{1}{2}x=4$;

д) $2x+5=2$; е) $2x-\frac{1}{2}=1$;

ж) $1-x=3$; з) $2-x=7$.

1141. а) $x-5=6$; б) $5+x=3$;
в) $x+7=7$; г) $x-6=6$;
д) $x+3=-6$; е) $x+12=7$;
ж) $2+x=-1$; з) $x-3=-3$;
и) $2x=4$; к) $-5x=100$;
л) $3x=2$; м) $11=5x$;
н) $2x=0$; о) $-x=1$;
п) $\frac{1}{2}x=3$.

Решите уравнение, считая, что a, b, c, y — заданные числа, а x — неизвестное **(1142—1145)**:

1142. а) $x-a=0$; б) $x+a=1$;
в) $x+a=2b$; г) $c+x=a-b$;
д) $x+y=2$; е) $y-3=a+x$.

1143. а) $2x=a$; б) $ax=1$, $a\neq 0$;
в) $bx=c$, $b\neq 0$; г) $cx=-y$, $c\neq 0$;
д) $xy=0{,}5$, $y\neq 0$; е) $-ax=b$, $a\neq 0$.

1144. а) $6(x-a)=7(x+b)$;
б) $5(x+b)=3(a-x)$;
в) $a(b+x)=3a-(x-a)b$, $a+b\neq 0$;
г) $2a-(a+b)x=(a-b)x$, $a\neq 0$;
д) $c-(c+a)x=(a-c)x-(b+ax)$, $a\neq 0$;
е) $ax-b(a-x)=c(b-x)-b(c-x)$, $a+c\neq 0$.

1145. а) $(x+a)+(2x-3a)=a$;
б) $(2b-3x)+(x-5b)=4x+6b$;
в) $(2x-c)-(5c-x)=3c$;
г) $3x-(a-2x)=7x-(x+3a)$.

1146. Решите уравнение:
а) $(x+1)(x-1)-(x-2)(x+3)=0$;
б) $(2x-1)(x+2)-(x-5)(2x+1)=0$;
в) $3(x+1)(x+2)=9+(3x-4)(x+2)$;
г) $5(2x+3)(x+2)-2(5x-4)(x-1)=12$.

1147*. Решите уравнение, считая, что a, b, k, m, n, p, q, y — заданные числа, а x — неизвестное:
а) $ax=3+b$; б) $2px=q$;
в) $kx+y=0$; г) $2yx-q=3$;
д) $2m-nx=1$; е) $3a^2b-6abx=ab$;
ж) $2m-3xy=5$; з) $7-2ax=3b$.

1148. Может ли сумма $(a+2)$ быть равна разности $(a-2)$?

1149. *Из папируса Ахмеса (ок. 2000 г. до н.э.).* Решите уравнение:
а) $x+\frac{1}{5}x=21$;

б) $\left(x+\frac{2}{3}x\right)-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}x\right)=10$;

в) $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x=10$;

г) $x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x=37$;

д) $3x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}x=1$.

1150*. *Из «Арифметики» Диофанта (III в.).* Решите уравнение:

$$(b+x)a=\frac{(a+b)x+(a+x)b}{2},$$

где x — неизвестное, a и b — известные числа. Определите, при каком условии:

а) уравнение имеет единственный корень;

б) уравнение не имеет корней;

в) корнем уравнения является любое число x.

1151*. а) Решите в натуральных числах уравнение $x^2-y^2=5$.

б) Решите в целых числах уравнение $x^2-y^2=5$.

1152*. *Из «Арифметики» Диофанта (III в.).* Решите системы для всех возможных значений a, b, c и d:

а) $\begin{cases} x+y=a, \\ x-3y=b; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=a, \\ \frac{x}{b}+\frac{y}{c}=d; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=a, \\ \frac{x}{b}-\frac{y}{c}=d. \end{cases}$

1153. а) Сумма двух чисел равна 106, а их разность равна 42. Найдите числа.

б) Сумма двух чисел равна 201, а их разность равна 99. Найдите числа.

1154. а) Одно число больше другого на 56. Сумма этих чисел равна 420. Найдите числа.

б) Одно число меньше другого на 105. Сумма этих чисел равна 203. Найдите числа.

1155. а) Одно число в 2 раза больше другого. Если меньшее из этих чисел увеличить в 4 раза, а большее увеличить в 2 раза, то их сумма будет равна 80. Найдите числа.

б) Одно число в 3 раза больше другого. Если одно из чисел увеличить в 2 раза, то сумма станет равной 105. Найдите числа. Сколько решений имеет задача? Как следует изменить формулировку задачи, чтобы решение было единственным?

1156. а) Одно из чисел на 17 больше другого. Если меньшее число увеличить в 2 раза, а большее на 16, то их сумма станет равной 99. Найдите числа.

б) Одно из чисел на 15 меньше другого. Если большее число уменьшить в 3 раза, то их сумма станет равной 69. Найдите числа.

1157. а) Даны два числа. Если первое число умножить на 2, то полученное число будет на 1 больше второго; если второе число умножить на 2, то полученное число будет на 55 больше первого. Найдите числа.

б) Даны два числа. Если первое число умножить на 4, то полученное число будет на 10 больше второго; если второе уменьшить на 30, то полученное число будет больше первого на 35. Найдите числа.

1158. Составьте числовое выражение, равное числу 100, используя 4 раза цифру 9 и знаки арифметических действий.

1159. Может ли сумма квадратов двух чисел равняться квадрату их разности? Если может, то в каком случае?

1160. Как изменится двузначное число, если к нему справа приписать такое же число?

1161. Какое число при делении на 12, 13, 14 каждый раз дает в остатке 1?

1162. Если учеников, пришедших на школьную математическую олимпиаду, в классе посадить по одному за каждую парту, то не хватит 11 парт, а если посадить по двое за парту, то останется свободных еще 5 парт. Сколько учеников пришло на олимпиаду и сколько парт в классе?

1163. Если каждый ученик класса сдаст на подарок по 3 р., то получится больше запланированного на 10 р. Если каждый сдаст по 2,5 р., то получится меньше запланированного на 5 р. Сколько учеников в классе?

1164. Двум туристам необходимо доехать от мотеля до станции технического обслуживания. Первый ехал со скоростью 50 км/ч и успел на станцию за 2 ч до ее закрытия. Второй, выехавший одновременно с первым, ехал со скоростью 35 км/ч и опоздал на 1 ч. На каком расстоянии находилась станция технического обслуживания от мотеля?

1165. Если разделить двузначное число на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 3. Если же разделить это число на сумму его цифр, увеличенную на 2, то в частном и в остатке получится 5. Найдите это двузначное число.

1166. У мальчика было 75 р. пяти- и десятирублевыми купюрами. Если бы пятирублевых купюр было столько, сколько десятирублевых, а десятирублевых столько, сколько пятирублевых, то всего у него оказалось бы 90 р. Сколько было у мальчика в отдельности пяти- и десятирублевых купюр?

1167. В одном бидоне на 5 л молока больше, чем в другом. Если из первого бидона перелить во второй 8 л, то во втором бидоне станет в два раза больше молока, чем останется в первом. Сколько литров молока в каждом бидоне?

1168. Составьте задачу, которая решалась бы с помощью уравнения или системы уравнений:

а) $16-(x+1)=5$; б) $16-(x-1)=5$;

в) $\begin{cases} x+y=13, \\ x-y=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+5y=28, \\ 2x+4y=22. \end{cases}$

1169*. Бассейн заполняют горячей и холодной водой, текущей из двух кранов. Оба крана заполняют бассейн за 1 ч 20 мин. Если первый кран работает 10 мин, а второй 12 мин, то заполняется $\frac{2}{15}$ бассейна. За какое время заполнит бассейн кран с холодной водой?

1170. Отцу и сыну вместе 52 года. Пять лет тому назад отец был в 5 раз старше сына. Сколько лет каждому?

1171*. Путник вышел из A в B. Первую половину времени, затраченного им на переход, он шел со скоростью 5 км/ч, а затем пошел со скоростью 4 км/ч. Второй путник вышел из A в B одновременно с первым, но он половину пути шел со скоростью 4 км/ч, а затем пошел со скоростью 5 км/ч. Кто из них раньше пришел в B?

1172. Скорость катера по течению реки x км/ч, против течения — y км/ч. Какова скорость течения реки и собственная скорость катера?

1173. Докажите, что сумма скорости катера по течению реки и его скорости против течения есть удвоенная собственная скорость катера.

1174. Катер прошел S км по течению реки за x часов, а против течения — за y часов. Какова скорость течения реки?

1175*. Лодка проплыла расстояние между пристанями за 3,5 ч, а обратно — за 2,5 ч. Во время движения собственная скорость лодки (скорость относительно воды) была постоянна. Сколько времени заняло бы движение лодки с той же скоростью относительно воды на такое же расстояние по озеру?

1176*. Вертолет пролетел расстояние от A до B за 66 мин, а обратно — за 55 мин. За сколько минут он пролетел бы расстояние от A до B и обратно в безветренную погоду, если скорость вертолета, скорость ветра и его направление постоянны?

1177*. а) Велосипедист ехал из A в B со скоростью 15 км/ч, а возвращался назад со скоростью 10 км/ч. Какова средняя скорость велосипедиста на всем участке?

б) Велосипедист ехал со скоростью 15 км/ч, потом точно такое же время — со скоростью 10 км/ч. Какова средняя скорость велосипедиста на всем участке?

1178*. Колонна солдат длиной s км движется со скоростью x км/ч. Из конца колонны в ее начало отправился сержант со скоростью y км/ч, затем с той же скоростью он возвратился в конец колонны. Сколько времени затратил сержант на путь туда и обратно, если:

а) $s=0{,}45$, $x=4$, $y=5$; б) $s=0{,}55$, $x=5$, $y=6$?

1179. Некоторую работу a человек могут выполнить за c дней. Сколько человек могут выполнить эту работу за d дней, если:

а) $a=15$, $c=12$, $d=18$; б) $a=24$, $c=27$, $d=18$?

1180. Некоторую работу a человек могут выполнить за c дней. Сколько человек еще надо пригласить, чтобы выполнить эту работу на d дней раньше, если:

а) $a=12$, $c=14$, $d=2$; б) $a=28$, $c=30$, $d=9$?

1181. *Старинная задача.* Половину некоторой работы a человек совершили в c дней, после чего для окончания этой работы к ним прибыло еще b человек, работавших с таким же успехом, как и первые. Сколько времени длилась вся работа?

1182. Проливной дождь лил 6 ч подряд и наполнил некоторую часть открытого бассейна. Если бы дождь прекратился, то насос откачал бы воду за 2 ч. Определите, за сколько часов насос откачает воду из бассейна, если дождь продолжает лить? Считайте процессы наполнения бассейна и откачки воды равномерными.

1183. *Задача Д. Пойи.* Том может выполнить работу за 3 ч, Дик за 4 ч, а Гарри за 6 ч. За какое время они могут выполнить эту работу, делая ее вместе (предполагается при этом, что они не мешают друг другу)?

1184*. а) Два путника вышли одновременно навстречу друг другу из городов A и B и встретились через a часов. Еще через b часов первый пришел в город B. Сколько времени второй путник шел из B в A, если:

1) $a=2$, $b=1$; 2) $a=4$, $b=8$?

б) Два путника вышли одновременно навстречу друг другу из городов A и B и встретились через a часов. Еще через b часов первый путник пришел в город B. Через сколько часов после встречи второй путник придет в город A, если:

1) $a=3$, $b=2$; 2) $a=2$, $b=3$?

1185*. *Задача Д. Пойи.* Патрульный самолет в тихую, безветренную погоду делает 220 миль в час. Запас топлива рассчитан на 4 ч полета. На какое расстояние может удалиться этот самолет, если ему необходимо вернуться к месту вылета и если против направления, в котором он первоначально летит, дует ветер, скорость которого равна 20 милям в час?

1186. Через первую трубу бассейн наполняется за a часов, через вторую трубу — за b часов, через обе трубы за x часов.

а) Какое равенство связывает a, b и x?

б) Выразите x через a и b.

в) Выразите a через x и b.

1187. Через первую трубу бассейн наполняется за a часов, через вторую трубу — за b часов, через третью трубу — за c часов. За сколько часов бассейн наполнится через три трубы при их совместной работе?

1188. Бак наполняют три трубы: через первую трубу — за a часов, через вторую трубу — за b часов, а через все три трубы — за x часов. За сколько часов бак наполнится через третью трубу?

1189*. *Старинная задача.* A и $Б$ вместе могут выполнить некоторую работу за a дней, A и B за b дней, $Б$ и B за c дней. За сколько дней A, $Б$ и B порознь выполнили бы эту работу?

1190. Одну сторону квадрата увеличили на 8 см, а другую уменьшили на 4 см. Выбрав обозначение для длины стороны квадрата, запишите:

а) длины сторон полученного прямоугольника;

б) периметр полученного прямоугольника;

в) площадь полученного прямоугольника.

1191. Проехав за один час половину пути, шофер подсчитал, что если он увеличит скорость машины на a км/ч, то вторую половину пути он проедет за 45 мин. Обозначив буквой v скорость машины за первый час, запишите:

а) скорость машины во второй час, т. е. увеличенную скорость;

б) остаток пути, который пройдет машина с увеличенной скоростью;

в) длину всего пути различными способами.

1192. Расстояние в 23 км лыжник прошел за 2,5 ч. Первые полтора часа он шел со скоростью, на 2 км/ч большей, чем в последний час движения. Обозначив буквой v скорость лыжника в последний час движения, составьте выражение, показывающее:

а) начальную скорость лыжника;

б) путь, пройденный лыжником за первые 1,5 ч;

в) весь путь, т. е. 23 км.

1193. В бидоне 6 л кваса. Из него отлили в 5 раз больше, чем осталось. Сколько литров кваса осталось в бидоне?

1194. Пешеход вышел из A в B со скоростью 5 км/ч. Через 2,4 ч навстречу ему из B в A выехал велосипедист со скоростью 11 км/ч. Их встреча произошла ровно на полпути между этими пунктами. Каково расстояние между A и B?

1195. Дочь ткала одна 4 дня по 3 аршина в день, но потом стала ткать и мать — по 5 аршин в день. Когда их тканья стало поровну, они прекратили работу. Сколько аршин они соткали вдвоем?[1]

[1] Задачи 1195—1198 и 1218 составил сельский учитель С. А. Рачинский (1838—1902), изображенный на картине «Устный счет» Н. П. Богданова - Бельского.

1196. Я всем своим ученикам дал орехов поровну. Четверо из них съели по 12 орехов, и тогда у этих четверых осталось столько орехов, сколько получил от меня каждый из них. По скольку орехов я раздавал?

1197. Некто имел 5 детей и дал им пряников поровну. Три из них съели по 5 пряников, и тогда у всех троих осталось столько пряников, сколько у двух остальных. Сколько всех пряников роздано?

1198. Если к моим деньгам прибавить 4 р., у меня будет столько же, сколько у моего брата. Если к моим деньгам прибавить 55 р., у меня будет в 4 раза больше, чем у моего брата. Сколько денег у каждого?

1199. *Старинная задача.* Двое выехали одновременно из одного города в другой. Первый ехал по 12 верст в час и приехал на место двумя часами раньше второго, который ехал по 9 верст в час. Какое расстояние между городами.

1200. *Старинная задача.* Продавая аршин сукна по 5 р., торговец получил бы на всем остатке этого сукна 12 р. прибыли. Продавая же по 3 р., он получил бы 4 р. убытку. Как велик остаток этого сукна и почем ему самому обошелся аршин его?

1201. Поезд прошел расстояние от A до B за 5 ч. На обратном пути он увеличил скорость на 20 км/ч и прошел это расстояние за 4 ч. Определите:

а) скорость поезда на пути из A в B;

б) расстояние от A до B.

1202. Велосипедист выехал из города и ехал по трассе со скоростью 12 км/ч. Через некоторое время он проколол шину и отправился назад пешком со скоростью 4 км/ч. Как далеко от города уехал велосипедист, если на путь туда и обратно он затратил 2,4 ч?

1203. Велосипедист подсчитал, что если он поедет со скоростью 6 км/ч, то опоздает на 1 ч; если поедет со скоростью 9 км/ч, то приедет на 1 ч раньше намеченного срока. Определите:

а) через какое время надо приехать;

б) каково расстояние;

в) с какой скоростью надо ехать, чтобы приехать вовремя.

1204. Товарный поезд шел от A до B со скоростью 60 км/ч, возвращался порожняком из B в A со скоростью 80 км/ч. Весь путь занял 14 ч (не считая времени разгрузки). Каково расстояние AB?

1205. *Старинная задача (Китай, II в.).* Сообща покупают буйвола. Если каждые семь семей внесут по 190 (денежных единиц), то недостаток равен 330. Если же каждые 9 семей внесут по 270, то избыток равен 30. Сколько семей и сколько стоит буйвол?

1206*. На дороге, соединяющей два горных селения, нет ровных участков. Автобус едет в гору всегда со скоростью 30 км/ч, а под гору со скоростью 60 км/ч. Найдите расстояние между горными селениями, если путь туда и обратно без остановок занимает ровно 2 ч.

1207*. Половина дороги, соединяющей два горных селения, проходит по ровной местности. Автобус едет в гору всегда со скоростью 30 км/ч, на ровном участке 50 км/ч, а под гору со скоростью 60 км/ч. Найдите расстояние между горными селениями, если путь туда и обратно без остановок занимает ровно 2 ч 15 мин.

1208*. Первая бригада может выполнить задание за 56 ч, а вторая — за 112 ч. Мастер рассчитал, что работу можно организовать так, что сначала над выполнением задания будет работать первая бригада несколько дней, а затем — вторая. При этом задание будет выполнено за 8 дней. Сколько дней должна работать каждая бригада? Считайте рабочий день по 8 ч.

1209. Брат нашел в 2 раза больше белых грибов, чем его сестра. Если сестра даст брату 1 гриб, то у него их станет в 3 раза больше, чем у сестры. Сколько белых грибов нашел каждый?

1210. У старшего брата в 9 раз больше значков, чем у младшего брата. Если старший брат даст младшему всего 5 значков, то у старшего брата будет в 4 раза больше значков, чем у младшего. Сколько значков у каждого?

1211*. Брат и сестра одновременно начали сбор малины: брат собирал ягоды в четырехлитровую корзину, а сестра — в трехлитровую. Брат собирал ягоды в 1,5 раза быстрее сестры. В какой-то момент они поменялись корзинами и закончили сбор ягод одновременно. Сколько литров ягод собрал брат за все время? Сколько литров ягод собрала сестра до обмена корзинами?

1212*. Отец и сын принялись косить два соседних участка. Когда сын выкосил половину меньшего участка, они присели отдохнуть и подсчитали, что отец косит в 2 раза быстрее сына и что если они будут работать также хорошо, но поменяются участками, то закончат работу одновременно. Определите площадь каждого участка, если один из них больше другого на 1 сотку.

1213*. Сулико подошла к роднику с двумя кувшинами. Вода из родника текла двумя струями — одна давала в 3 раза больше воды, чем другая. Сулико поставила одновременно два кувшина под струи и, когда набралась половина меньшего кувшина, она поменяла кувшины местами. Как это ни удивительно, но кувшины наполнились одновременно. Определите объем каждого кувшина, если вместе они вмещают 8 л.

1214*. *Старинная задача.* Торговец, имея сотню лимонов, роздал их трем разносчикам, с тем чтобы они продавали их по одной и той же цене. Возвратясь домой, первый отдает хозяину вырученные от продажи 1 р. 80 к. и оставшиеся непроданными 4 лимона, второй отдает 1 р. 60 к. и 3 лимона, третий отдает 1 р. 20 к. и 1 лимон. Сколько лимонов дано было каждому для продажи?

1215. а) Если к натуральному числу приписать справа нуль, то оно увеличится на 333. Найдите это число.
б) Если в записи натурального числа зачеркнуть последнюю цифру 0, то оно уменьшится на 666. Найдите это число.

1216. а) Если к натуральному числу приписать справа цифру 6, то оно увеличится на 672. Найдите это число.
б) Если в записи числа зачеркнуть последнюю цифру 9, то оно уменьшится на 612. Найдите это число.

1217*. а) Если к данному двузначному натуральному числу приписать справа или слева цифру 2, то полученные трехзначные числа будут равны. Найдите двузначное число.
б) Если в записи данного пятизначного натурального числа приписать справа цифру 2 и полученное таким образом число разделить на число, полученное из данного приписыванием цифры 2 слева, то получится 3. Найдите это число.

1218. Старший брат сказал младшему: дай мне 8 орехов, тогда у меня орехов будет вдвое больше, чем у тебя. А младший брат сказал старшему: ты дай мне 8 орехов, тогда у нас будет поровну. Сколько орехов у каждого?

1219*. Чтобы проплыть некоторое расстояние по течению, лодке требуется времени в 3 раза меньше, чем против течения. Во сколько раз собственная скорость лодки больше скорости течения?

1220*. Пловец по течению быстрой реки проплыл 150 м. Когда же он поплыл против течения, то за такое же время его снесло течением на 50 м ниже по течению. Во сколько раз скорость течения реки больше скорости пловца?

1221*. Скорость велосипедиста в 3 раза больше скорости пешехода. Они одновременно отправились из двух городов навстречу друг другу. Во сколько раз больше времени после встречи будет в пути пешеход, чем велосипедист?

1222*. Две старушки вышли одновременно навстречу друг другу из двух городов. Они встретились в полдень и достигли чужого города: первая в 4 часа пополудни, а вторая — в 9 часов. Узнайте, когда они вышли из своих городов.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТВЕТЫ

18. Цифра 0 встречается 9 раз, остальные цифры по 20 раз. **19.** а) 10! оканчивается на 2 нуля; б) на 12 нулей. **26.** а) 8; б) 25; в) 81. **31.** а) 2^7; б) 3^7; в) 4^7; г) 5^8. **33.** а) 2^6; б) 3^8; в) 3^{14}. **44.** При $n=41$ $n^2-n+41=41^2-41+41=41^2$ делится на 1, 41, 41^2. **48.** а) 1, 17; б) 1, 3, 5, 9, 15, 45; г) 1, 2, 4, 7, 14, 17, 28, 34, 68, 119, 238, 476. **49.** а) 19; б) 2, 3; в) 2, 7; г) 2, 29. **56.** а) 50; б) 20; в) 10; г) 90. **57.** 33. **66.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{6}{25}$; в) $\frac{31}{250}$; г) $\frac{8}{27}$. **67.** а) $\frac{8}{9}$; б) $\frac{7}{8}$; в) $\frac{41}{107}$; г) $\frac{35}{17}$. **74.** а) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$; б) $\frac{13}{20}$, $\frac{47}{50}$, $\frac{1}{125}$. **85.** а) 0,(3); 0,(2); 2,4(0); 12,(0). **86.** а) $\frac{8}{9}$; в) $\frac{13}{99}$. **92.** а) 0,(4); б) 0,68; в) 0,13(91); г) 0,3125. **99.** а) $-0{,}42$; б) $-\frac{5}{12}$; в) $\frac{5}{54}$; г) $-\frac{8}{21}$; д) 1,2. **100.** а) $-1{,}53$; б) $-5{,}28$; в) 3,8; г) 0,264; д) $-1{,}75$. **105.** а) $-\frac{1}{3}$; б) $-1\frac{2}{9}$; в) $-2\frac{5}{9}$; г) $-\frac{17}{99}$. **118.** а) При $a\geqslant 0$; при $a\leqslant 0$. **123.** а) Если a и b одного знака или $a+b=0$; если a и b — противоположные числа и $a\neq 0$. **140.** а) 2,35; б) 3,21; в) $-3{,}149$; г) $-5{,}22$. **141.** Да. **146.** а) 3,(27); б) 52,(12); в) 0. **150.** а) 0,222; б) 1,23; в) 12,0. **151.** а) $-0{,}333$; б) $-1{,}27$; в) $-12{,}0$. **152.** а) 127,02; б) 0,13; в) $-1{,}35$. **153.** а) 3, 5, 2; б) 3, 5, 2; в) 3, 5, 2, 0; л) 6, 7; м) 1, 0, 0. **154.** 1039,930; 1039,93; 1039,9; 1040; $1040=1{,}04\cdot 10^3$. **155.** а) 3,4; б) 1,4. **158.** а) 7,9; б) $-0{,}083$. **161.** а) $7{,}2<a+b<7{,}4$; б) $7{,}23<a+b<7{,}25$. **164.** Да. **177.** а) 7 и 7162; б) 1 и 141 219; в) 1 и 50 955; г) 2 и 155 364; д) 97 и 3395; е) 111 и 1998; ж) 333 и 1998; з) 1 и 3 998 000; и) 1 и 675. **179.** $12n+1$, где n — любое целое число. **180.** $12n+11$, где n — любое целое число. **183.** а) 835; б) 4; в) 975; г) 12; д) 47; е) 1426; ж) 114 289; з) 406 945; и) 27; к) 4. **191.** а) 2, 3, 7, 8; б) если само число четное. **192.** а) Например, $1+2-3\cdot 4+5\cdot 6+7+8\cdot 9=100$; б) например, $123+4-5+67-89=100$. **193.** $6=2^2+2$; $18=2^4+2$. **194.** Первое из семи решений: 378 126. **205.** а) $4\frac{1}{8}$; б) $2\frac{5}{6}$; в) $1\frac{5}{6}$; г) $9\frac{4}{5}$. **206.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{7}$; в) $\frac{3}{7}$; г) $\frac{125}{396}$; д) $\frac{3}{4}$; е) $4\frac{4}{5}$; ж) $3\frac{3}{8}$; з) 0; и) $8\frac{1}{3}$. **207.** а) 3; б) $\frac{1}{6}$; в) 0,75; г) 1,5; д) 1,75; е) 4. **208.** а) 1,5; б) 0,48; в) $1\frac{8}{27}$; г) $\frac{4}{7}$; д) $\frac{1}{3}$; е) $\frac{2}{7}$. **209.** а) 58,5; б) $\frac{2}{3}$; в) 33; г) $15\frac{15}{16}$. **210.** $\frac{1}{2}$. **218.** а) $-7{,}7$; б) -2; в) 1,7; г) 4,8. **219.** г) 4,35. **223.** а) $10\frac{1}{6}$; б) 0;

в) 0,25; г) 4. **224.** а) 8; б) 4; в) 34. **245.** 2519. **247.** а) 0,(8); б) нет; в) 3,6(3). **248.** а) $\frac{4}{7}$. **262.** а) $3\cdot5+2{,}5\cdot(5+1)$; б) $8\cdot10+3\cdot5-2\cdot4$. **263.** а) 8 и 2; б) 2 и 4. **264.** а) 15 км; б) 8 ч; в) в октябре. **266.** а) $\frac{1}{4}m$ и $\frac{3}{4}m$; 25 и 75; 30 и 90; 40 и 120; б) $\frac{150}{n+1}$ и $\frac{150n}{n+1}$; 50 и 100; 30 и 120. **267.** $\frac{mn}{n+1}$ и $\frac{m}{n+1}$; а) 210 и 70; б) 316 и 79. **268.** $\frac{m}{n+1}$; а) 150 кг; б) например, $n=4$, $m=250$. **269.** а) 18 и 6; б) $\frac{6}{n-1}$ и $\frac{6n}{n-1}$; 3 и 9; 2 и 8; 1 и 7. **270.** а) $\frac{m}{n-1}$ и $\frac{mn}{n-1}$; б) например, $n=3$, $m=12$. **274.** 9 и 7. **275.** 1,28 ч. **276.** В 11 раз. **291.** а) 900; б) 20. **296.** б) 566,28 р. **297.** 20. **299.** Прирост дохода был одинаковый. **300.** На 10%. **301.** За 8. **302.** а) Через 18. **305.** За 6. **308.** а) $-\frac{78}{121}$; б) -90; в) $-2{,}5$; г) -1; д) $-4{,}5$; е) -9. **309.** а) Выражение не имеет смысла; б) $-\frac{3}{7}$; в) 1,08. **319.** а) vt; б) ab; в) $2(k+l)$; г) $2\pi r$; д) πR^2; е) abc. **343.** а) $6a^2b$; б) $8b^2c^4$; в) $54c^2e^3$; г) $42e^5k^2$. **344.** д) $-25c^4k^3$; е) $63k^3p^5$; ж) $-40p^4x^7$; з) $-150x^4y^3$. **345.** а) $1\frac{1}{3}a^3b^5$; б) $\frac{2}{9}b^4c^5$; г) $-2k^4p^4$; д) $-3p^3x^6$; е) x^3y^4; ж) a^4x^7; з) $-4\frac{13}{18}a^4c^4$. **346.** а) $2{,}5a^2b^3c^3$; б) $-210b^3c^3e^6$; ж) $-72a^2k^3x^3$. **348.** н) $2{,}25c^4$; о) $-2\frac{10}{27}c^9$; п) $1\frac{15}{49}a^2b^2$; р) $-\frac{1}{216}p^3x^9$. **349.** а) $(5a)^2$; б) $(7b)^2$; д) $(8k^4)^2$; е) $\left(\frac{1}{7}p^4\right)^2$; ж) $\left(1\frac{1}{2}a^5x^3\right)^2$; з) $\left(1\frac{2}{3}b^6y^5\right)^2$. **350.** а) $(2a)^3$; б) $(3b)^3$; в) $(5c^2)^3$; г) $(6e^3)^3$; д) $\left(\frac{1}{3}a^3c\right)^3$; е) $\left(\frac{1}{5}b^2y^4\right)^3$; ж) $\left(2\frac{1}{2}a^6p^3\right)^3$; з) $\left(1\frac{1}{3}b^2c^6\right)^3$. **361.** а) $-6b$; б) $32a$; в) $-8b^3$; ж) $12b^7c^3$; з) $-12e^3k^5$. **374.** а) $20a^2b$; б) $11a^5b^2$. **391.** а) $0{,}9x+0{,}3y$; б) $31{,}9a-2{,}7b$; в) $-1\frac{2}{3}x+1\frac{13}{20}y$; г) $10{,}4a-1{,}7x$. **404.** а) $3b$; б) $8x$ и $4y$. **419.** д) $1{,}1ab-3bc+2cx$; е) $\frac{5}{6}x^2y^2-1\frac{5}{6}a^2b-\frac{3}{4}ab-\frac{3}{4}$. **420.** а) 0,6; б) 2; в) 2; г) 5. **422.** а) $5a-8b$; б) $3a+6b$; в) $-3a+10b$; г) $-5a+8b$. **435.** а) $4\frac{2}{3}$; б) $-\frac{1}{4}$; в) 0; г) 0,2; д) 8; е) 3; ж) 7. **436.** а) 0; б) 0. **444.** а) 6; б) $5\frac{3}{4}$; в) $1\frac{1}{3}$; г) $1\frac{1}{5}$. **453.** а) a^2+2a+1; б) x^2+3x+2. **454.** а) $20m^2+38mn+14n^2$; б) $36a^2+63ab+5b^2$. **456.** а) $-a^2-2ab-b^2$; б) $-x^2+y^2$. **461.** а) Да; б) да. **468.** а) $(x-y)(a-b)$; б) $(a-b)(x-y)$; в) $(m-n)(3+a)$. **469.** в) $(a-b)(2x+1)$; г) $(a+3)(a+1)$; д) $(m-2n)(x+1)$; е) $(a+b)(x+1)$. **470.** а) $-1{,}2$; б) $4\frac{2}{3}$; в) 3; г) 5. **478.** г) $2p^2-p-17$; д) $2x^2-5x+6$. **480.** в) $0{,}5m^3+0{,}5m^2+0{,}125$; г) 0. **482.** а) $-0{,}5$; б) $\frac{47}{53}$; в) $-\frac{8}{75}$; г) $\frac{21}{31}$. **488.** Нет. **492.** а) При $a=0$; б) при любых значениях a. **496.** а) -9; б) 1,2; в) 0,1. **498.** а) -13; б) 45; в) 3,591; г) $-3{,}024$; д) $-42\frac{7}{8}$; е) $15\frac{5}{8}$; ж) $10\frac{70}{81}$; з) 192; и) $-0{,}256$; к) 0. **519.** а) $(x+y)^2$; б) $(a+2b)^2$; з) $(2m+3n)^2$; и) $(x^2+y^3)^2$. **521.** ж) $2m^2+3mn+8n^2$; з) $-5p^2-20pq-16q^2$; и) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

к) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$. **528.** а) $a^2-2ab^2+b^4$; б) $x^6-2x^3y+y^2$; в) $m^6-2m^3n^2+n^4$. **532.** а) $(a-b)^2$; г) $(5-3c)^2$; ж) $(x^2-3y)^2$. **535.** ж) $-11p^2+5pq+12q^2$; з) $50m^2+32mn-20n^2$; и) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$; к) $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$. **539.** г) $(5p^2)^2$; д) $(m^4n^6k^5)^2$; е) $(7a^2b^3c^5)^2$. **551.** а) 4899; б) 6396; в) 89999; г) 249996; д) 2,9999; е) 99,96. **557.** У сестры на 9 кусков меньше. **565.** г) $(4y)^3$; д) $(my)^3$; е) $(a^2b)^3$; ж) $(xy^2)^3$; з) $(0{,}5p)^3$; и) $(0{,}1c^2)^3$. **569.** а) $x+1$; б) $2a^5$; в) $4m^2-4m+27$; г) $-2q^6$. **579.** а) $(-2)^3$; б) $(-5)^3$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$; ж) $(4m^2n^3)^3$; з) $(-3p^5q^3)^3$; и) $(-5a^5b)^3$. **582.** а) -2; б) a^4-27; в) $-2p^5+12p^2+100$; г) $2n^9-4n^5-m^3$. **587.** а) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$; в) $x^3+6x^2+12x+8$. **605.** a^2. а) Указание. Преобразуйте данное выражение в квадрат разности $a+1$ и 1; б) m^2; в) $4q^2$; г) $4x^2$. **606.** а) $x^2+2xy+y^2-z^2$. **609.** а) a^8-17a^4+16; б) $a^2+b^2-c^2$; в) a^8-b^8; г) a^3+b^3; д) a^3-b^3; е) $4a^2-8$. **610.** $2^{64}-1$. Указание. Добавьте множитель $(2-1)$. **611.** а) -1; б) $4x^2-6x+21$; в) $5m^2-20m+20$; г) $28p^2-100p+95$; д) $90a^2-75a-9$; е) $-2a^2+4a+6$; ж) $-40x+3$; з) $z^2-2xz+2yz$; и) $-4yz$; к) $4yz$. **612.** а) $7a^2-2a+7$; б) $3m^2-7m+17$; в) $-4ab$; г) $4ab$; д) $-x^2-10x-1$; е) $-32a^2+20ab+7b^2$. **618.** а) $(a-b)^2$. **627.** а) $4c^2(4a^2bc-3ac+7b^2-2abc^3)$; б) $3xz(4xy+6y^3z-9x^4z^5-8y^4z^3)$. **636.** ж) $(1{,}5-c^2)(1{,}5+c^2)$; з) $(1{,}25a^5-0{,}1b)(1{,}25a^5+0{,}1b)$; и) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$. **637.** в) $-(m+1)^2$; г) $-(n-3)^2$; д) $(x^2-y)^2$. **641.** а) $2(2m+n)(-m+13n)$; б) $4(3y-2x)(x+2)$; в) $25(a-3)$. **650.** а) Указание. Замените $-3x^2$ на $-2x^2-x^2$; б) Указание. Замените $-4bc$ на $-2bc-2bc$ и представьте полученное выражение в виде разности квадратов. **658.** д) $\frac{(x-y)^2}{4xy}$; е) $\frac{5m}{7n(a-b)}$; ж) $\frac{p}{2q}$; з) $\frac{4(a+b)}{9}$. **666.** и) $\frac{2(a-b)}{a^2-ab+b^2}$; к) x^2+xy+y^2. **670.** а) $\frac{x}{x-2}$ и $\frac{-1}{x-2}$; д) $\frac{15}{2x-8}$ и $\frac{14}{2x-8}$; е) $\frac{2x-6}{2x-10}$ и $\frac{5}{2x-10}$. **681.** а) -1; б) $\frac{2}{x-y}$; в) $\frac{5a}{a-b}$; г) $\frac{3m+3}{n-m}$. **684.** а) $\frac{3a}{2}$; б) $\frac{2x}{3}$; ж) $\frac{3bx+3x-a}{b+1}$; з) $\frac{a+2n-5}{n-2}$. **687.** а) $\frac{2a+b}{a(a+b)}$; б) $\frac{2a}{a^2-b^2}$; ж) $\frac{5a^2-4ab}{(a-2b)(a+b)}$; з) $\frac{4x^2-xy}{(x-y)(2x-y)}$. **689.** а) $-\frac{1}{12x}$; б) $\frac{9}{4m}$; в) $\frac{2q+3}{pq}$; г) $\frac{a-by}{xy}$; д) $\frac{m^2-n}{mn^2}$; е) $\frac{a^2+12b}{3ab^2}$. **690.** а) $\frac{m(b+c)}{abc}$; б) $\frac{a(2b-5n)}{bmn}$; в) $\frac{2ab-8b^2+4a}{bm}$; г) $\frac{z-y}{yz}$. **691.** а) $\frac{2x-3}{x^3}$; б) $\frac{7-3am^2}{m^4}$; в) $\frac{a^4+b^4}{a^5b^7}$; г) $\frac{4b^2-3x^2}{b^5x^4}$; д) $\frac{3az^4-3bx^6y}{x^7y^5z^5}$; е) $\frac{mn(3ac^5n+b^5m^5)}{a^4b^6c^9}$. **692.** а) $\frac{4a+9}{6a^2}$; б) $\frac{2mx-ny}{6x^2y^2}$; в) $\frac{4ap+3bq^2}{24p^3q^5}$; г) $\frac{2mn^3x-3y}{30m^3n^7}$. **693.** а) $\frac{2}{a-1}$; б) $\frac{13a}{b(x+1)}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{5}$; д) $\frac{5}{a+b}$; е) $\frac{y^2-x^2}{xy(a-b)}$; ж) $-\frac{1}{xy}$; з) $\frac{n+1}{mn(m-2n)}$; и) $\frac{3+2p}{p^2q(2p-3q)}$; к) $\frac{19}{6a^2(a-4b)}$. **694.** а) $\frac{5a+9}{a^2-9}$; б) $\frac{5m-9n}{m^2-n^2}$; в) $\frac{2x+2}{9x^2-4}$; г) $\frac{p}{2(p^2-4q^2)}$; д) $\frac{a}{a^3-b^3}$; е) $\frac{m^2+mn+n^2}{2(m^3+n^3)}$; ж) $\frac{2y}{(x-2y)^2}$; з) $\frac{p^2-pq+q^2}{(p+q)(q^3-p^3)}$. **695.** а) $\frac{3m-13}{m-2}$; б) $\frac{2y}{x+y}$; в) $\frac{a^2+b^2}{b}$; г) $\frac{a^2+b^2}{2a}$; д) $\frac{2b^2}{b-a}$; е) $\frac{2a^2}{a+b}$.

698. а) $\frac{2}{7}$; б) $\frac{2}{3n}$; в) $\frac{2}{p}$; г) $2ab$; д) 4. **699.** а) $\frac{2ab-2b^2}{a}$; б) $\frac{2x-2y}{xy}$; в) $\frac{4n}{m+n}$; г) $\frac{2(b+1)}{a+2}$. **703.** а) 1,5; б) −2,2; в) $\frac{3}{7}$; г) $-1\frac{1}{3}$. **705.** а) $\frac{1}{5}m$; б) $-\frac{1}{4}a$; д) $\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$; е) $x-1{,}5$. **706.** а) 6; б) $2\frac{2}{3}$; в) 7,5; г) −2,45; д) 3; е) 3; ж) 12; з) −2,4. **709.** а) $ab+ac+bc$; б) $15x^2-5x+5$; в) $\frac{a^2}{c}+\frac{ab^2}{c}+b$; г) $\frac{3x^2}{y}+12x^2+6x$. **710.** а) $\frac{a}{x}$; б) $1-2a$; в) −1; г) $\frac{a^2}{bc}$; д) $-\frac{1}{x}$; е) −0,5; ж) $-\frac{x}{n}$; з) 3. **711.** а) $a+\frac{1}{b}$; б) $\frac{3a-2b^2}{6b}$; в) $2x+\frac{1}{3b}$. **712.** а) 0; б) $\frac{2}{m+2}$; в) $\frac{3x}{4ay}$; г) $\frac{d-c}{d}$. **714.** а) b; б) a. **720.** а) 2; б) −4; в) 2; г) −2,5. **724.** а) 0,96; б) 0,1; в) −4; г) $-10\frac{1}{9}$. **725.** а) 6; б) 0,5. **727.** 2. **736.** а) 3,5; б) 3,5. **737.** в) −5; −1; 1; 5; г) −2; 0; 2; 4; д) −2; 0. **741.** а) При любых значениях a и b; в) при $b\neq0$; г) при $a\neq0$ и $b\neq0$; д) при $x\neq-y$. **742.** а) 1; б) 1; в) 1; г) 1. **744.** а) 2; б) 1; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{4}$. **745.** а) 1; б) выражение не имеет смысла. **746.** а) 2^3; б) 2^8; в) 3^{-2}; г) 3^{-1}; д) 3^{-4}; е) 5^1; ж) $16^{-1}=4^{-2}=2^{-4}$. **747.** а) 10 000; 1000; 100; 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; б) 32; 16; 8; 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{32}$; в) −27; 9; −3; 1; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $-\frac{1}{27}$. **748.** а) 1; 1; 1; 1; 1; б) 1; 1; 1; 1; 1; в) $\frac{1}{4}$; 4; 4; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}$. **756.** а) a^{-1}; б) a^1; в) a^3; г) a^0; д) a^{-10}; е) a^9. **759.** а) a^6b^{-15}; б) $a^{14}b^{-4}$; в) $a^{12}b^{20}$. **766.** а) $3^4>4^3$; б) $2^4=4^2$; в) $10^{20}>20^{10}$; г) $100^{200}>200^{100}$; д) $1999^{2000}>$ $>1998^{1999}$. **767.** а) $(a^2)^5$; б) $(a^2)^6$; в) $(a^2)^{21}$. **768.** а) $(a^5)^{10}$; б) $(a^2)^{25}$; в) $(a^{10})^5$. **772.** а) $(a^{-2})^{-25}$; б) $(a^{-5})^{-10}$; в) $(a^{10})^5$; г) $(a^{-10})^{-5}$; д) $(a^{-25})^{-2}$. **778.** а) При $n=2$; б) при $n=10$; в) при $n=-6$. **779.** а) $2{,}74\cdot10^3$; б) $3{,}82\cdot10^{-2}$; в) $1{,}1\cdot10^7$. **780.** а) $6\cdot10^2$; б) $6\cdot10^5$; в) $4\cdot10^4$; з) $5\cdot10^4$. **781.** а) $1{,}65\cdot10^3$; б) $3{,}94\cdot10^{-15}$; в) $2{,}54\cdot10^{14}$. **785.** а) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; б) $\frac{1}{(a+b)^2}$. **786.** а) 0,3; б) $\frac{4}{9}$; в) 8. **788.** а) $a^{-1}+b^{-1}$; б) $a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2}$. **789.** а) При $a\neq3$ и $a\neq-3$. **790.** а) $\frac{a+b}{b-a}$; е) $\frac{ab}{b-a}$. **791.** а) $-\frac{1}{3\,998\,000}$; б) $\frac{1999}{949\,494}$. **793.** а) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$; б) $a+b$; в) $\frac{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4}{a^2+ab+b^2}$; г) $\frac{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4}{a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6}$; д) $\frac{1}{a^4-b^4}$; е) $a+b$; ж) $\frac{a^2+2a+4}{a^3+2a^2+4a+8}$; з) $a+3$; и) $\frac{a^4+2a^3+4a^2+8a+16}{a^2+2a+4}$; к) $\frac{a^4-2a^3+4a^2-8a+16}{a^6-2a^5+4a^4-8a^3+16a^2-32a+64}$; л) $\frac{1}{a-2}$; м) $a+1$. **794.** а) Да; б) да. **795.** а) Частное x^2-5x+6, остаток 0; частное x^2-2x-3, остаток 0; частное x^2-x-2, остаток 0; б) частное x^2+x-1, остаток 7; частное x^2+x+1, остаток 7; частное x^3+x-2, остаток 10; в) частное x, остаток $-x-1$; частное x^2, остаток x^2-1; частное $x-1$, остаток 0. **796.** а) $x-1$; б) $x-1$; в) x^2-x; г) x^2-4x+3. **797.** а) $x+1$; б) $-x+1$; в) $\frac{x-1}{x+1}$; г) $\frac{x+2}{x-2}$. **798.** а) x^8+x^4+1; б) $x^{10}-x^8+x^6-x^4+x^2-1$; в) $x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1$; г) $x^{11}-x^{10}+x^9-x^8+$ $+x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$. **801.** Да, число 2. **802.** а) 23; б) 31. **806.** а) 16; б) 17,5; в) 54. **807.** а) 12; б) 42. **813.** а) Для противоположных; б) для равных; в) для $a=0$, b — любое число или $b=0$, a — любое число; г) для $a=1$. **815.** а) $2a$ и 0. **830.** д) $-0{,}6$; е) $1\frac{25}{64}$; ж) 3; з) 9,68. **832.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0; д) 1,4; е) 2. **834.** а) 0,156; б) 32; в) 4; г) -2. **844.** а) 3; б) $\frac{1}{8}$; в) 1,8; г) 135. **849.** $4ab$, $8ab$, $8ab$. **864.** а) $10a$; б) $-2x$; в) $-18y$; г) $3a$; д) $-10b$; е) $-5x$; ж) $-4ab$; з) $-7xy$; и) 0; к) $-9ax^2$. **865.** а) $5a^2b$; б) $26a^3b^3$; в) $pq-p^2-q^2$; г) $2a^2+6m^3$; д) $2y$; е) $2x$. **868.** а) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. **869.** Указание. В заданиях а) — в) примените формулу разности квадратов. **874.** а) 2; б) 5; в) -1; г) $-\frac{1}{4}$. **877.** а) 1,48; б) 1; в) 2; г) 87. **878.** а) 12,5; б) 0,08; в) $3\frac{19}{110}$. **862.** е) $(m-1)^2(m+2)$; ж) $(y-1)(y+1)(y-z)(y+z)$; з) $(c+2d)(1+c-d)$. **883.** а) 66,8; б) 109; в) 10,8; г) 169; д) $-0{,}2$; е) $-1{,}9$; ж) 0,8; з) -105. **885.** в) Указание. Рассмотрите три случая: $n=3k$, $n=3k-1$, $n=3k+1$, где k — целое число. **907.** а) x^2+9; б) $\frac{a^3+2a^2+4a+1}{a+2}$; в) $-3m$; г) $-5a$; д) 0; е) 0. **908.** а) $-0{,}2$; б) $12\frac{1}{14}$; в) 10; г) 11. **911.** а) $-\frac{2a}{3b}$; б) $-\frac{5m}{4n}$; в) $\frac{5b(a-b)}{4c(a+b)}$; г) $\frac{5m(2n+m)}{4(2n-m)}$. **912.** д) 1; е) $\frac{1}{m}$; ж) $\frac{c+1}{c-1}$; з) $\frac{2pq}{p^2-q^2}$. **923.** $1{,}4b$ р.; а) 2100 р.; б) 1960 р. **924.** $0{,}75a$ р.; а) 3,75 р.; б) 9 р. **925.** $\frac{100b}{a}$ %; а) 125%; б) 80%. **926.** $\left(1+\frac{p}{100}\right)a$; $\left(1-\frac{p}{100}\right)a$; а) 44; 36; б) 75; 25. **927.** $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$; а) 576; б) 338. **930.** На $\frac{100(a-b)}{b}$%; а) на 25%; б) на 100%. **933.** На $\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^{12}-1\right)\cdot 100\%$; а) на 60%; б) на 79%. **935.** В $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ раз; а) в 1,5 раза; б) в 2 раза. **939.** 35,5%. **942.** $\frac{m(100-p)}{100}$ т; а) 1,2 т; б) 2 т. **944.** На $\frac{100p}{100-p}$%. **945.** $\frac{m(100-p)}{100-q}$ кг; а) 15 кг; б) 35 кг. **949.** а) Вторая мера выгоднее; б) на 50%. **950.** За 5 ч. Указание. Обратите внимание: *почистив* бак картошки, рядовой Степанов *начистит* 80% бака картошки. **956.** $S+at$ км. **957.** $(a+b)(n-1)$ р.; а) 360 р.; б) 660 р. **968.** За $\frac{ac}{b}$ дней; а) за 24 дня; б) за 45 дней. **996.** ж) 6; з) $\frac{1}{21}$; и) 0; к) 0; л) 0; м) 0. **997.** а) $1\frac{1}{7}$; б) -3; в) 0,04; г) $-0{,}4$. **998.** и) 2,5; к) $\frac{2}{3}$; л) -4; м) 4,5. **999.** а) 6; б) $\frac{2}{9}$; в) 5; г) 2; д) $\frac{16}{27}$; е) $7\frac{5}{7}$; ж) 28; з) 7,2. **1000.** а) Нет корней; в) x — любое действительное число;

д) 2,2; е) 1; ж) 5,5; з) $1\frac{5}{7}$; и) нет корней; к) нет корней; л) x — любое действительное число. **1001.** а) $2\frac{1}{11}$; б) 2,75; в) $1\frac{1}{3}$; г) нет корней. **1003.** ж) 6; з) 8. **1004.** 49 и 37. **1005.** а) 820, 1240 и 1170 учащихся; б) 65, 81 и 130 книг; в) 33, 11 и 26 см; г) 1300, 650 и 450 рабочих. **1006.** а) 15 р. и 6 р.; б) 50 км/ч. **1009.** а) 6 рыбок; б) 0,5 кг; в) 5,5 р. **1010.** а) 1 см и 8 см; б) $1\frac{2}{3}$ см и $8\frac{1}{3}$ см; в) 4,5 см и 5,5 см. **1011.** а) 18 и 20; б) 4, 6 и 8; в) 11 и 13; г) 5, 7, 9. **1012.** а) 2,4 т, 0,9 т и 3,2 т; б) 30, 34 и 32 книги. **1027.** а) При $a=-2{,}5$; б) при $b=25$. **1043.** а) (14; 7); б) (10; −2); в) (2; 6); г) (3; 21). **1044.** а) (3; 2); б) (4; 2); в) (5; 3); г) (1; −1); д) (3; 4); е) (−2; 1); ж) (31; 7); з) (2; 1); и) (1; −1); к) (0; −3); л) (8; −4); м) (−3; 3). **1045.** а) (2; −3); б) (7; −13); в) (2; 3); г) (−1; −2); д) (−2; 3); е) (4; −5). **1046.** а) $\left(-\frac{25}{17}; \frac{23}{17}\right)$; б) $\left(\frac{1}{6}; -\frac{3}{2}\right)$. **1047.** а) (−5; 4); б) (0; 1); в) (5; −18); г) (−4; −11). **1048.** а) (4; −1); б) (−5; −1); в) (0,5; 2,5); г) (−1; 5). **1049.** а) (−1; 2); б) (5; −2); в) (7; 18); г) (2; −1); д) (0; 3); е) (7; 5); ж) (7; −2); з) (5; −6). **1050.** а) (−2; 2); б) (7; 18); в) (1; 1); г) (−3; −3). **1051.** а) $\left(\frac{2}{9}; 2\frac{5}{9}\right)$; б) (0; 2). **1061.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **1067.** При $a=8{,}5$. **1068.** Да. **1072.** а) (3; 1); б) (−2; 11); в) (3; 1); г) (4; −5). **1073.** а) $(x;\ 0{,}5-x)$, где x — любое действительное число; б) (0,5; 0); в) нет решений; г) $(x;\ 0{,}5x-2)$, где x — любое действительное число. **1075.** а) Нет решений; б) $\left(15; -11\frac{1}{3}\right)$; в) (7; 5); г) (5; −2); д) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$; е) нет решений. **1077.** а) Нет решений; б) (−3; 7); в) нет решений; г) $(x;\ x+2)$, где x — любое действительное число; д) нет решений; е) $(0;\ y)$, где y — любое действительное число; ж) нет решений. **1083.** а) (1; 1; 1); б) (1; 4; 2); в) (2; 1; 3); г) (3; 2;1); д) (1; 1; 1); е) (2; 0; 1); ж) (2; 3; −1); з) (3; 3; 3). **1084.** а) 3 и 7; б) 6 и 15. **1085.** а) 17 и 23; б) 4 и 19. **1086.** а) 5,5 и 11; б) 6 и 18; 8,4 и 25,2. **1087.** а) 6 и 13; б) 50 и 60. **1088.** а) 3 и 5; б) 2,5 и 4. **1089.** а) 28 км; б) 42 км. **1090.** а) 3,2 р.; б) 6,5 р. **1091.** 80 деталей. **1092.** 12 км/ч и 45 км/ч. **1093.** 17 км и 24 км. **1094.** 11 см и 15 см. **1095.** 20 билетов по 10 р. и 10 билетов по 15 р. **1096.** Кресло стоит 800 р., стол — 200 р. **1097.** 6 купюр. **1098.** 45. **1100.** 40 м и 25 м. **1101.** 50 р. и 30 р. **1102.** 100 пирожных и 200 булочек. **1103.** 600 и 400. **1104.** 51 и 33,6. **1106.** 9 см, 13 см, 16 см. **1107.** 41 см, 53 см, 66 см. **1108.** 42. **1109.** 19 л, 11 л, 24 л. **1110.** 16 л, 10 л, 10 л. **1111.** 170 и 40 рупий. **1112.** 400 г. **1113.** а) 125 кг; б) 20 р., 25 р., 30 р., 35 р.; в) 6, 5, 4, 3, 3, 2 и 1. **1114.** 60, 45 и 40 орехов. **1115.** а) $x=4n$, $y=-3n$, где n — любое действительное число; в) уравнение не имеет решений в целых числах; г) $x=-1+3n$, $y=2-5n$, где n — любое действительное число. **1116.** а) $x=5n$, $y=2-3n$, где n — любое действительное число. **1118.** а) Нет; б) да. **1119.** а) 9 воробьев, 10 горлиц, 11 голубей; б) 3 куропатки, 5 голубей, 22 воробья. **1121.** Задача имеет 8 решений: мужчин, женщин и девушек было 1, 16, 9, или 2, 14, 10, или 3, 12, 11, или 4, 10, 12, или 5, 8, 13, или 6, 6, 14, или 7, 4, 15, или 8, 2, 16. **1124.** Чиновник купил лошадей и быков 51 и 9, или 30 и 40, или 9 и 71. **1125.** а) (14; 3); б) (−7; −5); в) (3; 5); г) (2; 2; 2); д) (−3; −9; 0); е) (5; 5; 5). **1126.** а) (2; 1); б) (3; 2); в) (1; 1); г) (2; 1; 0); д) (0; 0; 1); е) (1; 1; 1); ж) $(1;\ y;\ -y)$, где y — любое действительное число; з) $(x;\ 2;\ 4-x)$, где x — любое действительное число; и) (1; 1; 1). **1127.** а) 6; б) 0,5; в) 1,05; г) 0,5;

д) 0,0115; е) 4,5; ж) 0,0003; з) 3,1. **1131.** а) 0; б) $-0,14$; в) 16; г) 5,375. **1132.** а) 14,4; б) 5,4; в) 38; г) 36,5; д) 20; е) 0,25; ж) $-62,2$; з) 4,4. **1134.** а) 91; б) -46; в) 50 000; г) 40 000. **1135.** к) -1; л) 2. **1138.** а) 2; б) $2(x^2+y^2)$; в) $\frac{m^4-n^4}{m^2n^2}$; г) $4x^2$. **1144.** а) $6a \quad 7b$; б) $\frac{3a \quad 5b}{8}$; в) $\frac{3a}{a+b}$; г) 1; д) $\frac{b+c}{a}$; е) $\frac{ab}{a+c}$. **1149.** а) 17,5; б) 9; в) $5\frac{5}{7}$. **1162.** 32 ученика, 21 парта. **1163.** 30 учеников. **1164.** 350 км. **1165.** 75. **1166.** 7 пятирублевых купюр и 4 десятирублевые. **1169.** За 4 ч. **1170.** 12 лет и 40 лет. **1171.** Первый пришел раньше второго. **1175.** 2 ч 55 мин. **1176.** За 60 мин. **1177.** а) 12 км/ч; б) 12,5 км/ч. **1178.** $\frac{2sy}{y^2-x^2}$; а) 0,5 ч; б) 0,6 ч. **1179.** $\frac{ac}{d}$; а) 10; б) 36. **1180.** $\frac{ad}{c-d}$; а) 2; б) 12. **1181.** $\frac{2ac+bc}{a+b}$ дней. **1182.** За 3 ч. **1183.** За 1 ч 20 мин. **1184.** $\frac{a(a+b)}{b}$; а) 6 ч; б) 6 ч. **1185.** Примерно на 436 миль. **1187.** За $\frac{abc}{ab+bc+ac}$ ч. **1189.** За $\frac{abx}{ab-ax-bx}$ ч. **1194.** 44 км. **1195.** 60 аршин. **1196.** По 16 орехов. **1197.** 75 пряников. **1199.** 72 версты. **1200.** 8 аршин по 3,5 р. **1201.** а) 80 км/ч; б) 400 км. **1202.** 7,2 км. **1203.** а) Через 5 ч; б) 36 км; в) 7,2 км/ч. **1204.** 480 км. **1205.** 126 семей, 3750 денежных единиц. **1206.** 40 км. **1207.** 50 км. **1208.** 6 дней и 2 дня. **1209.** 4 и 8. **1210.** 45 и 5. **1211.** 4,2 л; 2,4 л. **1212.** 4 и 5 соток. **1213.** 3 л и 5 л. **1214.** 35, 40 и 25 лимонов. **1217.** а) 22; б) 85 714. **1218.** 40 и 56 орехов. **1219.** В 2 раза. **1220.** В 2 раза. **1222.** В 6 ч утра.

ПОСЛЕСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Алгебра играет в математике большую роль, теперь существует даже тенденция «алгебраизации» математики. Наряду с фундаментальной ролью внутри математики алгебра имеет и прикладное значение. У нее есть выходы в физику, кибернетику, математическую экономику и т. п. Поэтому изучение алгебры в школе является важной частью фундамента естественно-научного образования.

Школьный курс алгебры 7—9 классов на самом деле лишь наполовину является алгеброй, другая его половина приходится на вопросы математического анализа, изучаемые традиционно в курсе алгебры (длина отрезка, действительные числа, функции). Поэтому в школьном курсе алгебры желательно различать эти составляющие и во всяком случае излагать алгебраические вопросы алгебраическими методами. Например, к буквенным выражениям часто подходят как к функциям многих переменных (функциональный подход), хотя естественнее говорить о них как о множестве объектов, подчиненных явно выписанным законам (алгебраический подход).

В целом содержание учебников алгебры для 7—9 классов серии «МГУ — школе» соответствует традиционному содержанию программы для 7—9 классов, но порядок расположения материала в учебниках и способы его изложения отличаются от традиционных. Существует два *способа распределения учебного материала* по годам обучения. *Первый* состоит в том, что в каждом классе дают понемножку буквенных выражений, уравнений, функций и т. п., так как детям якобы скучно долго изучать одни и те же вопросы. При этом страдают научная аккуратность и строгость изложения, появляются порочные логические круги, недомолвки и несуразности. Так происходит, например, когда действительные числа рассматриваются после изучения тождеств, функций и их графиков. Реализация этого первого подхода к построению курса алгебры в процессе обучения чаще ориентирована на формирование навыков.

Но есть и *второй* способ распределения учебного материала по годам обучения, основанный на его внутренней логике. Он диктует последовательность появления в учебнике тех или иных вопросов, позволяет в каждом учебном году ставить главную научную задачу. Этот второй способ, принятый в учебниках серии «МГУ — школе», позволяет излагать материал в строгой логической последовательности без ненужных повторов и недомолвок, сделать изложение даже сложных вопросов ясным и доступным.

Учебники «Алгебра, 7—9» серии «МГУ — школе» обеспечивают системную подготовку по предмету, позволяют ориентировать процесс обучения на формирование осознанных умений, требуют меньше, чем обычно, времени, так как они не «натаскивают» ученика, не только нацелены на формирование навыка, но и учат действовать осознанно.

Как показывает опыт работы по ним, интерес к предмету возникает у учащихся не от многообразия и частого чередования тем, а от того, что учащиеся имеют возможность «вжиться» в каждый элемент содержания, постепенно повышая его понимание. В них изложение учебного материала логически более стройное, без ненужного концентризма. Это позволяет каждый раз сосредоточиваться на одном вопросе и поэтому изучить его более глубоко и в то же время более экономно. Материал в учебниках расположен так, что отдельные темы программы изучаются один раз и в полном объеме, чтобы потом к ним не возвращаться в теоретической части учебника. Дальнейшее закрепление и повторение, а иногда и развитие изученного ведется через линию упражнений. Изложение материала связное — подряд излагаются большие темы, нет чересполосицы мелких вопросов, нарушающих логику изложения крупных тем.

Основной методический принцип, положенный в основу изложения теоретического материала и организации системы упражнений, заключается в том, что *ученик за один раз должен преодолевать не более одной трудности*. Поэтому каждое новое понятие формируется, каждое новое умение отрабатывается сначала в «чистом» виде, потом трудности совмещаются.

Сложность заданий в каждом пункте нарастает линейно: учитель сам должен определить, на какой ступени сложности он может остановиться со своим классом или с конкретным учеником. Важная особенность системы упражнений заключается в том, что для каждого нового действия или приема решения задач в учебнике имеется достаточное количество упражнений, которые *выстроены по нарастанию сложности и не перебиваются упражнениями на другие темы.*

Важную роль в формировании первоначальных представлений о зарождении и развитии науки играют *исторические сведения*, завершающие каждую главу учебника.

Учебники полностью обеспечивают обучение тех школьников, которые *могут и хотят учиться* основам наук. Они нацелены *на повышенный уровень математической подготовки учащихся*, но их можно использовать в классах с обычной программой по математике. При этом можно не изучать сверхпрограммный материал и пропускать сложные задачи, а также выбирать уровень полноты изложения теоретического материала на уроке и уровень предъявления требований к знаниям и умениям учащихся в соответствии с поставленными целями обучения и с возможностями конкретного класса (оставаясь на уровне не ниже обязательных требований к математической подготовке учащихся). При таком подходе у учителя имеется возможность с помощью учебника реализовать идею дифференциации обучения при работе со своим классом, а у сильных учащихся — реальная возможность более глубоко разобраться в любом вопросе, чего они часто лишены, если учебник написан на среднего ученика.

Проведенное в наших учебниках систематическое изложение материала показывает, что нет необходимости как в отдельной программе, так и в отдельных учебниках для школ и классов с углубленным изучением математики. Учебники «Алгебра, 7—9» серии «МГУ — школе» предназначены для общеобразовательных классов, в которых дополнительные материалы и сложные задачи можно не рассматривать. Если же учитель имеет достаточно часов, если его класс проявляет интерес к математике, то за счет *дополнений* в конце глав учебников, а также пунктов и отдельных задач со звездочкой, необязательных в обычных общеобразовательных классах, можно расширить и углубить содержание изучаемого материала до объема, предусмотренного программой для классов с углубленным изучением математики, т. е. учебники можно использовать как в обычных, так и в профильных классах. В них содержатся все материалы, предусмотренные программой для углубленного изучения математики.

Углубленное изучение математики можно начинать с 7 класса, так как перед изучением алгебры необходимо систематизировать знания учащихся за предыдущие годы обучения, тем более что углубленное изучение математики в 8—9 классах имеет ориентационный характер. Авторы учебников серии «МГУ — школе» считают принципиально важным вести обучение школьников в рамках общеобразовательной программы и программы с углубленным изучением математики по одним и тем же учебникам, начиная с 7 класса. Тогда переход с одной программы обучения на другую не будет вызывать трудностей ни для учащихся, ни для учителей.

Содержание курса алгебры диктует порядок изложения основного учебного материала: сначала должны изучаться чисто алгебраические вопросы (алгебраические выражения) как более доступные в этом возрасте, а уж затем функциональные вопросы. Поэтому 7 класс посвящен алгебраическим выражениям, а изучение функций начинается лишь в 8 классе.

Авторы считают, что курс алгебры должен начинаться темой «Действительные числа», позволяющей подвести итог предшествующему изучению арифметики и в то же время закладывающей основы для дальнейшего изучения математики. Данный материал должен сформировать у учащихся представление о действительном числе как о длине отрезка.

Это дает возможность в дальнейшем значительно упростить рассуждения, связанные с построением графиков функций, с определением квадратного корня и т. п. При таком построении курса изучение алгебраических выражений и функционального материала имеет полноценный научный фундамент, исчезают порочные логические круги, недомолвки и несуразности.

Такое изложение материала в школьных учебниках предпринимается впервые, доступность изложения материала о действительных числах в учебнике подтверждена многократно, в том числе в многолетнем авторском эксперименте.

Изложение темы «Алгебраические выражения» основывается на чисто алгебраической точке зрения. Одночлен определяется как произведение некоторых чисел и букв, многочлен — как сумма одночленов, алгебраическая дробь — как отношение многочлена к ненулевому многочлену. Приводятся правила, которым они подчинены. Например, в одночлене можно поменять местами множители, в многочлене можно привести подобные члены, алгебраическую дробь можно сократить на ненулевой многочлен и т. д. Эти свойства мотивируются по мере их введения; отмечается, что при замене букв числами в рассматриваемых алгебраических (буквенных) равенствах последние превращаются в верные числовые равенства (за исключением случаев деления на нуль).

В учебниках достаточно внимания уделено решению уравнений, неравенств и их систем, построению графиков элементарных функций, решению текстовых задач, в том числе в общем виде, что необходимо для изучения курсов геометрии и физики.

Учебник «Алгебра, 7» включает главы «Действительные числа», «Алгебраические выражения», «Линейные уравнения». К каждой главе имеются дополнения, содержащие исторические сведения, задания для повторения, а также материал, входящий только в программу для классов с углубленным изучением математики.

Тема «Действительные числа» составляет теоретическую основу дальнейшего изложения. Весьма трудным с педагогической точки зрения является изложение в школе эволюции понятия числа. Каким образом и когда должно вводиться понятие «действительное число»? Практически все согласны, что действительное число надо вводить как десятичную дробь, вообще говоря, бесконечную. Но на какой стадии обучения это надо сделать и как — здесь мнения специалистов расходятся. Авторы учебников считают, что чем раньше сказать школьнику, что действительное число есть бесконечная десятичная дробь, тем лучше, потому что он оперирует с длиной отрезка, координатной осью и системой координат, графиками функций, квадратными корнями и т. д. Разговоры об иррациональности чисел, несоизмеримости с единицей, существовании корня значительно упрощаются, если у школьника есть представление, пусть даже самое элементарное, о числе как бесконечной десятичной дроби.

С этого и начинается учебник «Алгебра, 7». Глава I «Действительные числа» посвящена повторению изученного ранее. Здесь происходят обобщение и систематизация уже известных сведений о числе. Дополняя эти сведения, получаем, что рациональное число представимо в виде периодической десятичной дроби и, обратно, любая периодическая дробь есть десятичное представление некоторого рационального числа. При этом достаточно привести примеры деления уголком числителя дроби на ее знаменатель, чтобы прийти к выводу, что в итоге получается десятичная дробь, вообще говоря, бесконечная и периодическая. После этого приводятся примеры бесконечных *непериодических* десятичных дробей, которые и называют иррациональными числами.

Бесконечные десятичные дроби сравнивают так же, как конечные десятичные дроби. Что же касается действий над ними, то здесь уже приходится обращаться к приближенным методам. Главное приложение десятичной дроби на этом этапе есть длина отрезка. *Длиной отрезка AB* при выбранном единичном отрезке называется число a, определяемое десятичной дробью: $a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, где α_0 — приближенная длина отрезка AB с точностью до 1 с недостатком; α_0,α_1 — приближенная длина отрезка AB с точностью до 0,1 с недостатком; $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2$ — приближенная длина отрезка AB с точностью до 0,01 с недостатком и т. д.

Таким образом, длина любого отрезка есть записанное в десятичной системе число, которое конструируется, основываясь на последовательном его приближении с недостатком.

Изучение главы I «Действительные числа» должно привести к следующему представлению о действительном числе: всякое действительное число можно записать в виде десятичной дроби (вообще говоря, бесконечной). Эти числа подчинены основным законам, изложенным в п. 3.4. Длина любого отрезка — действительное число.

В результате изучения главы I учащиеся должны повторить действия с обыкновенными и десятичными дробями, с целыми числами, понять, что всем точкам координатной оси соответствуют числа и, наоборот, каждому числу соответствует точка координатной оси.

Таким образом, координатная ось, которая ранее была «дырявой» — без иррациональных точек, теперь заполнена полностью, без пропусков.

Как уже отмечалось выше, изложение материала главы II «Алгебраические выражения» основывается на чисто алгебраической точке зрения, а именно одночлен определяется как произведение некоторых чисел и букв, многочлен — как сумма одночленов, алгебраическая дробь — как отношение одного многочлена к другому (ненулевому). Приводятся формальные правила, которым они подчинены. В этом исчислении буквы могут быть числами, которые мы только обозначили буквами.

Каждое из рассмотренных равенств называют алгебраическим равенством, и его справедливость следует из сформулированных правил. В дальнейшем выясняется, что каждое алгебраическое равенство является тождеством на некотором множестве чисел, т. е. равенством между числовыми выражениями, возникающими при замене букв числами (при условии, что эти выражения имеют смысл).

В 7 классе главное внимание уделяется технике преобразований на основе указанных правил, а трудности, связанные с функциональным представлением буквенных выражений (область определения рациональных функций, решение рациональных уравнений, т. е. потеря и приобретение корней и т. д.), переносятся в старшие классы.

В результате изучения главы II «Алгебраические выражения» учащиеся должны научиться правильно делать выкладки с одночленами, многочленами, алгебраическими дробями и уметь упрощать несложные буквенные выражения.

Глава III посвящена изучению линейных уравнений и их систем. При изучении линейного уравнения $ax+b=0$ надо учесть, что ранее уже решалось много задач, сводящихся к уравнению первой степени, т. е. к случаю $a\neq 0$. Теперь надо уделить внимание и случаю $a=0$, когда линейное уравнение перестает быть уравнением первой степени. Это пригодится в дальнейшем, при изучении систем линейных уравнений.

Способы решений систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными изучаются прежде всего в случаях, когда все коэффициенты при неизвестных отличны от нуля и непропорциональны. Затем на примерах рассматриваются остальные случаи.

В результате изучения главы III учащиеся должны понять, что, применяя последовательно способ подстановки, они всегда решат систему линейных уравнений, т. е. придут либо к единственному решению, либо к бесконечному множеству решений, либо к противоречию, показывающему, что решений нет.

Программой по математике предусмотрены два варианта планирования при изучении алгебры в 7 классе.

Первый вариант рассчитан на 120 ч в год (I четверть — 5 ч в неделю, далее — 3 ч в неделю), второй вариант — на 136 ч (4 ч в неделю).

В классах, ориентированных на углубленное изучение математики, работа ведется по второму варианту планирования. Более способные учащиеся с определившимся интересом к предмету могут усвоить многие темы за меньшее число часов. Высвобождающееся таким образом учебное время, а также дополнительные 16 ч используются для изучения доказательств и пунктов учебника, отмеченных звездочкой, а также дополнений к главам, на решение более сложных задач из учебника и других источников.

Так, при изучении главы I доказываются в общем виде признаки делимости, которые в 5 классе доказывались на характерных примерах, повторяются и изучаются вновь другие вопросы делимости натуральных чисел из дополнения к главе I, в том числе и алгоритм Евклида для натуральных чисел. При изучении главы II рассматриваются деление многочленов и алгоритм Евклида для многочленов. При изучении главы III линейные диофантовы уравнения и метод Гаусса. Все эти вопросы предусмотрены программой по математике для классов с углубленным изучением математики и содержательно связаны с материалом, изучаемым в 7 классе.

Для классов, работающих по первому и второму вариантам планирования, составлены контрольные работы, близкие по содержанию, но отличающиеся уровнем сложности. Это позволит учителю отобрать для контроля в своем классе или для отдельных учащихся задания, отвечающие их уровню математической подготовки. Тексты контрольных работ публикуются в методической печати, они будут опубликованы в дидактических материалах для учащихся и методическом пособии для учителя.

Ниже приведено примерное тематическое планирование.

7 класс

I вариант: 5 ч в нед. в I четверти, далее 3 ч в нед., всего 120 ч

II вариант: 4 ч в неделю, всего 136 ч

В скобках указано число часов, отведенных на изучение главы, параграфа, пункта по **I варианту** планирования. Звездочкой отмечены дополнительные уроки при работе по **II варианту** планирования.

Глава I. Действительные числа (19+6*)

§ 1. Натуральные числа (4)

1.1. Натуральные числа и действия с ними (1).
1.2. Степень числа (1).
1.3. Простые и составные числа (1).
1.4. Делители натурального числа (1).

§ 2. Рациональные числа (5+1*)

2.1. Обыкновенные дроби. Конечные десятичные дроби (1).
2.2. Разложение обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь (1).
2.3. Периодические десятичные дроби (1).
2.4. Периодичность десятичного разложения обыкновенной дроби (1*).
2.5. Десятичное разложение рациональных чисел (2).

§ 3. Действительные числа (10)

3.1. Иррациональные числа (1).
3.2. Понятие действительного числа (1).
3.3. Сравнение действительных чисел (1).
3.4. Основные свойства действительных чисел (2).
3.5. Приближения числа (2).
3.6. Длина отрезка (1).
3.7. Координатная ось (1).

Контрольная работа № 1 (1).

Дополнения к главе I (5*)

Делимость чисел (признаки делимости, алгоритм Евклида, НОД и НОК, деление с остатком целых чисел). Решение задач.

Глава II. Алгебраические выражения (72+5*)

§ 4. Одночлены (9)

4.1. Числовые выражения (1).
4.2. Буквенные выражения (1).
4.3. Понятие одночлена (1).
4.4. Произведение одночленов (2).
4.5. Стандартный вид одночлена (2).
4.6. Подобные одночлены (2).

§ 5. Многочлены (18)

5.1. Понятие многочлена (1).
5.2. Свойства многочленов (2).
5.3. Многочлены стандартного вида (2).
5.4. Сумма и разность многочленов (2).
5.5. Произведение одночлена на многочлен (2).

5.6. Произведение многочленов (3).
5.7. Целые выражения (2).
5.8. Числовое значение целого выражения (2).
5.9. Тождественное равенство целых выражений (1).
Контрольная работа № 2 (1).

§ 6. Формулы сокращенного умножения (19+2*)

6.1. Квадрат суммы (2).
6.2. Квадрат разности (2).
6.3. Выделение полного квадрата (2).
6.4. Разность квадратов (2).
6.5. Сумма кубов (2).
6.6. Разность кубов (2).
6.7. Куб суммы (1*).
6.8. Куб разности (1*).
6.9. Применение формул сокращенного умножения (3).
6.10. Разложение многочлена на множители (3).
Контрольная работа № 3 (1).

§ 7. Алгебраические дроби (18)

7.1. Алгебраические дроби и их свойства (3).
7.2. Приведение алгебраических дробей к общему знаменателю (2).
7.3. Арифметические действия над алгебраическими дробями (4).
7.4. Рациональные выражения (4).
7.5. Числовое значение рационального выражения (3).
7.6. Тождественное равенство рациональных выражений (1).
Контрольная работа № 4 (1).

§ 8. Степень с целым показателем (8)

8.1. Понятие степени с целым показателем (2).
8.2. Свойства степени с целым показателем (2).
8.3. Стандартный вид числа (2).
8.4. Преобразование рациональных выражений (2).

Дополнения к главе II (3*)

Делимость многочленов (деление с остатком, алгоритм Евклида).
Решение задач.

Глава III. Линейные уравнения (21+5*)

§ 9. Линейные уравнения с одним неизвестным (6)

9.1. Уравнения первой степени с одним неизвестным (1).
9.2. Линейные уравнения с одним неизвестным (1).
9.3. Решение линейных уравнений с одним неизвестным (2).
9.4. Решение задач с помощью линейных уравнений (2).

§ 10. Системы линейных уравнений (15+2*)

10.1. Уравнения первой степени с двумя неизвестными (1).
10.2. Системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными (1).
10.3. Способ подстановки (3).
10.4. Способ уравнивания коэффициентов (2).
10.5. Равносильность уравнений и систем уравнений (2).
10.6. Решение систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными (2).
10.7. Системы уравнений первой степени с тремя неизвестными (2*).

10.8. Решение задач при помощи систем уравнений первой степени (3).
Контрольная работа № 5 (1).

Дополнения к главе III (3*)

Линейные диофантовы уравнения. Метод Гаусса. Решение задач.

Повторение (8)

Повторение курса алгебры 7 класса.
Итоговая контрольная работа № 6.

В серии «МГУ — школе» в настоящее время выходят и готовятся к печати следующие учебники: «Арифметика, 5», «Арифметика, 6», «Алгебра, 7», «Алгебра, 8», «Алгебра, 9» авторов С. М. Никольского, М. К. Потапова, Н. Н. Решетникова и А. В. Шевкина.

Для повышения уровня математического образования в стране, совершенствования школьных учебников по инициативе ректора Московского университета академика В. А. Садовничего разработана Программа «МГУ — школе» и началось издание учебников, сохраняющих и развивающих лучшие традиции отечественного математического образования. В 2003 году математическая общественность отметит 300-летие знаменитой «Арифметики» Л. Ф. Магницкого — энциклопедии математических знаний того времени. В учебниках серии «МГУ — школе» вы найдете многочисленные обращения к этому источнику. Работа со старинными задачами — одна из сильных сторон учебников, она может много дать в воспитании уважения к традициям и истории.

Авторы выражают благодарность учителям, приславшим свои замечания и предложения по совершенствованию учебников, указавшим пропущенные в первом издании опечатки. Это В. И. Гридасов и Е. А. Удовиченко (г. Воронеж), М. А. Свинорез (г. Орел), Н. А. Филоненко (г. Дзержинский Московской области), О. А. Сухарева (С.-Петербург) и др.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава III. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 9. Линейные уравнения с одним неизвестным

§ 10. Системы линейных уравнений

Дополнения к главе III

Учебное издание

Никольский Сергей Михайлович
Потапов Михаил Константинович
Решетников Николай Николаевич
Шевкин Александр Владимирович

АЛГЕБРА

Учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Ю. Акимова*
Младший редактор *Н. В. Ноговицина*
Художник *В. А. Андрианов*
Художественный редактор *Е. Р. Дашук*
Технические редакторы *С. С. Якушкина, Г. В. Субочева*
Корректоры *И. А. Григалашвили, О. В. Ивашкина*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с диапозитивов 03.05.05. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 18 + 0,31 форз. Усл. кр.-отт. 19,06. Уч.-изд. л. 16,97 + 0,50 форз. Тираж 10 000 экз. Заказ № 14797.

Федеральное государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени «Издательство «Просвещение» Федерального агентства по печати и массовым коммуникациям. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфический комбинат». 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

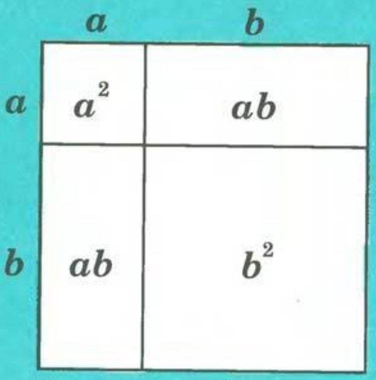
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$



$a > 0,\ b > 0$

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

4) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$;

$a \neq 0$, $b \neq 0$, *m и n – произвольные целые числа.*

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

$$ax + b = 0$$

Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{b}{a}$.

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение не имеет корней.

Если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней.

МГУ – ШКОЛЕ

ISBN 5-09-014400-1
9 785090 144001